На правах рукописи

ДАВЫДОВ ДЕНИС ВИТАЛЬЕВИЧ

ИНТЕРВАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В ЭКОНОМИКЕ

Специальность 08.00.13 – математические и инструментальные методы экономики

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора экономических наук

Владивосток – 2009

Работа выполнена на кафедре математических методов в экономике Дальневосточного государственного университета

Официальные оппоненты:

доктор экономических наук
ГУРИЕВ СЕРГЕЙ МАРАТОВИЧ

доктор физико-математических наук, профессор
АНТИПИН АНАТОЛИЙ СЕРГЕЕВИЧ

доктор экономических наук, профессор
МИЩЕНКО АЛЕКСАНДР ВЛАДИМИРОВИЧ

Ведущая организация:

Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН

Защита состоится «23» декабря 2009 г. в 14 часов на заседании диссертационного совета Д 212.196.01 по присуждению ученой степени доктора экономических наук в ГОУ ВПО «Российская экономическая академия имени Г.В. Плеханова» по адресу: 117997, г. Москва, Стремянный переулок, д. 36, 3-й Учебный корпус, аудитория № 353.

С диссертацией можно ознакомиться в читальном зале научной библиотеки Российской экономической академии имени Г.В. Плеханова (3-й Учебный корпус)

Автореферат разослан «03» ноября

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.196.01,
доктор технических наук,
профессор Петров Л. Ф.

I. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. Принятие экономических решений в практической деятельности отдельных агентов, будь то потребители, предприятия или их конгломераты, а также региональные или федеральные органы власти, осложнено влиянием огромного количества разнородных внешних и внутренних факторов и очевидной неполнотой информации о воздействии данных факторов и их внутренней взаимосвязи. Возможности выявления информации на отдельных рынках и в целом в экономической системе зависят от интенсивности деятельности отдельных агентов и степени изменчивости экзогенных условий. Чем меньше измерений доступно в экономической системе и чем больше изменчивость внешней среды и уровень ее неопределенности, тем менее точным является описание экономической системы. В такой ситуации становятся необходимыми разработка и использование новых по сравнению с вероятностными подходов к принятию управленческих решений в экономике, которые позволяют минимизировать волюнтаризм и снизить издержки, обусловленные неточностью, неопределенностью исходных данных.

Высокий уровень неопределенности, ограниченная возможность наблюдений и измерений, динамичность и нестационарность происходящих экономических процессов затрудняют нахождение статистических оценок параметров, определение субъективных вероятностей или мер принадлежности нечетких множеств с достаточной степенью обоснованности. В таких ситуациях более предпочтительно применение интервальных математических методов, предполагающих знание только диапазонов (интервалов) изменения неизвестных параметров. При этом статистические функции распределения значений параметров внутри своих интервалов считаются неизвестными. Интервальный подход к описанию факторов неопределённости и принятию решений в экономике мало изучен, хотя и достаточно эффективен в условиях существенно ограниченной исходной информации.

Степень разработанности проблемы. Неполная информация и связанные с ней проблемы принятия решений в условиях неопределенности находят отражение в определениях, свойствах, принципах и подходах, сформулированных в трудах отечественных и зарубежных ученых А.Е. Алтунина, В.М. Белова, Д. Блэквэлла, Д.А. Валиева, Б. Ван де Валле, С. Ватанабе, И.А. Вателя, А.А. Ватолина, А.П. Вощинина, И. Гуда, Н.В. Дилигенского, В.И. Жуковского, Л. Заде, Э. Зимана, Ю. Козелецкого, В.П. Кузнецова, Н.Н. Моисеева, Ф.Х. Найта, А.О. Недосекина, А.И. Орлова, С.А. Орловского, П.В. Севастьянова, Л. Сэвиджа, Р.И. Трухаева и др. Основное внимание здесь уделено вероятностно-статистическому, субъективно-вероятностному, лингвистическому, нечеткому и нечетко-интервальному подходам к моделированию неопределенных ситуаций, выбираемых исследователями в зависимости от количества и структуры доступной информации, а также степени субъективизма лиц, принимающих решения. Данные подходы в той или иной мере характеризуются известной неравномерностью учета значений внутри областей изменения параметров и используют их *усреднение* в качестве основного метода разрешения неопределенности.

Интервальный подход в задачах принятия решений (Т. Билджик, П. Волли, Х. Кайбург, С. Смит, С. Фернандез, П. Фишберн и др.) концентрируется в области микроэкономического анализа и сводится в научной литературе к описанию интервальных систем индивидуальных предпочтений либо интервальных оценок субъективных вероятностей неопределенных исходов. С другой стороны, присущая индивидуальным решениям субъективность восприятия трактуется в литературе с позиций вероятностных и нечетких множеств, но не включает интервальную трактовку восприятия доступной информации.

Пожалуй, единственной сферой приложения непосредственно интервальных методов в принятии экономических решений является задача оценки экономической эффективности инвестиционного проекта на основании прогнозов будущих периодов о движении денежных средств. Данная задача достаточно широко разработана в научной литературе, ее решение опирается на субъективно-нечеткие и интервальные методы с различными типами предположений о характере неопределенности, присущей рассматриваемым финансовым прогнозам (С.Н. Авдеенко, Д.Н. Алёшин, П.В. Бронз, А.П. Вощинин, А.З. Данг, А.О. Недосекин, С.А. Смоляк). При этом уделяется достаточно ограниченное внимание проблеме немонотонности чистой приведенной стоимости проекта как функции рыночной процентной ставки, возникающей при анализе многопериодных моделей.

Отметим, что в экономической и экономико-математической литературе практически отсутствуют попытки применения интервального подхода к моделированию региональных и макроэкономических систем. Исключение составляет предложенное И. Роном интервальное обобщение модели «затраты-выпуск».

В целом то же замечание касается и интервальных моделей управляемых систем, развитие которых с последней четверти 20-го века в большинстве своем находило применение только в физико-технической и инженерной сфере.

Вообще, с точки зрения математического моделирования интервальные методы применяются для анализа неопределенностей, возникающих при использовании данных с ошибками, при отсутствии знаний о вероятностных свойствах объекта, при возникновении ошибок округления в расчетах с конечной точностью. Математический аппарат интервальных вычислений, развитый в трудах отечественных и зарубежных ученых Г. Алефельда, Е.Г. Анциферова, Л.Т. Ащепкова, Б.И. Белова, А.П. Вощинина, В.К. Горбунова, С.В. Емельянова, Р.С. Ивлева, К. Йенсона, С.А. Калмыкова, Е.К. Корноушенко, А.Б. Куржанского, А.В. Лакеева, Р. Мура, Т.И. Назаренко, С.И. Носкова, А.И. Орлова, В.В. Подиновского, И. Рона, Г.Р. Сотирова, И. Хансена, Ю. Херцбергера, С.П. Шарого, Ю.И. Шокина, З.Х. Юлдашева и др., позволяет формулировать интервальные уравнения, интервальные оптимизационные задачи и анализировать интервальные функции. Результатом применения большинства классических интервальных моделей является интервальная оценка решения либо параметрическая область возможных решений. При этом многие ученые, активно развивающие отрасль интервальной математики, подчеркивают, что ее идеологическая основа заключается в системном представлении «интервальный вход – интервальный выход». Такой подход не позволяет получать однозначные решения в условиях исходной интервальной информации.

В этой связи можно сделать заключение, что *в научной литературе не получило должного развития направление интервального моделирования и принятия решений, связанное с нахождением однозначных решений, в той или иной степени «годных» для всех возможных реализаций значений интервальных параметров*.

Кроме того, с позиции принятия решений интервальную модель следует трактовать как континуум моделей с параметрами, принимающими значения из допустимых интервалов. Поскольку истинные значения параметров заранее не известны, то не известна полностью и модель, на базе которой надлежит принимать те или иные рациональные решения. *Принятый в параметрическом программировании поиск множества «приемлемых» решений как функции параметров здесь лишен особого смысла без сопутствующего анализа возможности достижения каждого из потенциально реализуемых решений*.

Нерешенность проблем интервального моделирования и использования характерных для него подходов и методов в решении задач оценивания и управления экономическими процессами и предопределили выбор цели и постановку задач диссертационного исследования.

Цель диссертации состоит в разработке теоретико-методологических концепций, методов и моделей принятия рационально обоснованных экономических решений в условиях высокой (интервальной) неопределенности исходной информации.

Для достижения указанной цели в работе сформулированы и решены **следующие задачи**:

- Предложены концептуальные подходы к нахождению однозначных решений задач линейной и нелинейной оптимизации, управления и теории игр в условиях интервальной неопределенности исходных данных.
- Предложено обобщение известных подходов к упорядочиванию одномерных и многомерных интервалов на основе введенного определения показателя интервального неравенства.

- Разработаны новые методы решения задач стабилизации, наблюдаемости и идентификации параметров линейных и нелинейных интервальных управляемых систем. Выявлены достаточные условия их асимптотической стабилизации.
- Разработаны методы нахождения равновесий в интервальных бескоалиционных играх с использованием предложенного показателя интервального неравенства.
- Получены и обработаны эмпирические данные опросов потребителей, подтверждающие наличие интервального субъективного восприятия в процессе потребительского выбора; исследованы соответствующие системы предпочтений. Разработана интервальная модель оптимального потребительского выбора, позволяющая выявить локальную неэластичность по цене и многозначность функции спроса на субъективно воспринимаемых потребителями ценовых интервалах.
- Разработаны модели оптимизации производственной деятельности предприятия на рынках монополии, олигополии и совершенной конкуренции в условиях интервальной неопределенности цен ресурсов и продукции.
- Разработаны интервальные макроэкономические модели краткосрочной стабилизации, идентификации долгосрочных параметров развития, оценки потенциала межрегионального экономического взаимодействия.
- Разработаны и обоснованы методы анализа финансовых потоков в условиях интервальной неопределенности; построена модель оптимизации портфеля активов с интервально определенными доходностями, получены оценки рисков вложений.

Объектом исследования являются экономические процессы и системы, рассматриваемые с позиций принятия рациональных решений в условиях высокой неопределенности.

Предмет исследования – методы и модели принятия экономических решений в условиях интервальной неопределенности параметров экономических процессов и систем.

Теоретико-методологическую основу исследования составили труды отечественных и зарубежных ученых, специалистов по проблемам принятия решений, интервального математического моделирования, микроэкономики, макроэкономики и методов финансового анализа. В работе использованы методы системного анализа, сопоставительного экономического анализа «затраты-риски», методы теории вероятностей и математической статистики, эконометрики, линейной и нелинейной оптимизации, дифференциальных уравнений и теории оптимального управления, теории игр, методы сбора и обработки эмпирической информации.

Информационную базу исследования составили статистические данные Росстата и его региональных подразделений по Дальнему Востоку России, Центрального банка Российской Федерации, Всемирного банка, Международного валютного фонда.

Научная новизна исследования. В диссертации осуществлено решение крупной научной проблемы разработки концептуальных и методологических подходов, модельного аппарата и методов принятия рациональных экономических решений в условиях интервальной неопределенности исходной информации, удовлетворяющих общему критерию минимизации величины ошибки решения и ограничениям модели на множестве рассматриваемых интервальных параметров.

Наиболее значимые научные результаты, полученные лично автором и выносимые на защиту, состоят в следующем:

- *Выявлена и обоснована роль субъективности в принятии решений экономическими агентами. Показана связь известных парадоксов классической теории выбора с проблемами принятия решений при неполной информации. Сформулирована и обоснована гипотеза об интервальном восприятии информации в процессе принятия экономических решений.*
- *Предложена и исследована концепция существования универсального решения интервальных задач линейной и нелинейной оптимизации, предполагающая минимизацию суммарной невязки, отражающей стоимость отклонения решения от целевых показателей и ограничений задачи на множестве интервальных параметров. Поиск универсального решения в исходной интервальной модели сведен к разрешимой задаче линейной (соответственно, нелинейной) оптимизации.*
- *Предложена мера частичного упорядочения одномерных интервалов, вычисляемая по их центрам и радиусам и хорошо аппроксимирующая вероятность выполнения соответствующего интервального неравенства в стохастическом смысле. Показана эффективность ее применения для локализации окрестности экстремума в интервальных оптимизационных задачах, анализа чувствительности решения интервальных оптимизационных задач к степени неопределенности, выраженной величиной радиусов интервалов, а также в качестве меры риска принятия решений в условиях интервальной неопределенности исходных данных.*
- *Для линейных и нелинейных интервальных управляемых систем сформулированы и решены задачи стабилизации, наблюдаемости и идентификации параметров, построены соответствующие управления. Доказаны теоремы о достаточных условиях*

асимптотической устойчивости решения под воздействием данных управлений. Предложены подходы к описанию равновесий в интервальных бескоалиционных играх. Сформулированы и доказаны свойства и утверждения, определяющие процедуры нахождения равновесий в чистых и смешанных стратегиях. Показано, что применение интервального неравенства к интервальным функциям выигрышей игроков позволяет найти наиболее узкое и, одновременно, максимально робастное к ширине интервалов неопределенности множество равновесий в интервальной бескоалиционной игре. Обоснован метод рафинирования существующих в игре равновесий, заключающийся в максимизации меры интервального неравенства на интервальных функциях выигрышей игроков.

- *Сформулирована и решена интервальная задача потребительского выбора, из которой следует локальная неэластичность по цене и многозначность функции спроса на каждом субъективно воспринимаемом потребителем ценовом интервале.*
- *Предложены интервальные модели оптимизации производственной деятельности компаний на рынках монополии и совершенной конкуренции, решения которых позволяют прогнозировать объемы продаж продукции, величину издержек, выручки, прибыли предприятий в условиях интервальной неопределенности ценовых параметров. Получено решение широко известной в микроэкономической теории отраслевых рынков проблемы нахождения фокального равновесия в общей модели предполагаемых вариаций на основе предложенной обобщенной интервальной модели поведения фирм на олигополистических рынках. Для симметричной модели дуополии данное равновесие определяет долю каждой фирмы в размере 40% потенциальной емкости рынка.*
- *Построены новые интервальные модели краткосрочной макроэкономической стабилизации и идентификации долгосрочных макроэкономических параметров, особенностью которых является сочетание эконометрических и интервальных методов оценивания и прогнозирования. Модель стабилизации предполагает динамическое управление скоростью изменения денежной массы с заданными целевыми показателями скорости изменения ВВП и инфляции. Модель идентификации позволяет выявлять специфические параметры долгосрочного развития отдельной страны по сравнению со среднемировыми тенденциями развития, включая потенциал научного прогресса, климатические особенности и социально-трудовые характеристики населения.*

- *Предложена новая интервальная энтропийная модель межрегионального производственного баланса, сочетающая подходы межотраслевого баланса, энтропийные методы нахождения равновесных потоков в сложных взаимодействующих системах и интервальные оценки основных параметров, связанных с неточностью и высокой стоимостью сбора и обработки статистических данных.*
- *Применение интервальной энтропийной модели на реальных статистических данных для регионов Дальнего Востока России позволило выявить потенциал межрегионального экономического взаимодействия, в том числе низкий уровень общей экономической связанности регионов Дальнего Востока России.*
- *Предложены новые методы решения задачи формирования оптимального портфеля активов в условиях интервальной доходности, основанные на вычислении функции наименьшего риска при каждом требуемом значении доходности всего портфеля активов. Доказаны свойства монотонности и непрерывности введенной функции риска. Для некоторых отрезков значений требуемой доходности портфеля получены точные аналитические значения оптимальных долей вложения капитала в активы. Проведен сравнительный анализ методов, предложены и исследованы эвристические процедуры, упрощающие решение исходной задачи. Получены общие рекомендации по структуре диверсификации вложений в условиях высокой неопределенности: стратегия максимальной диверсификации при низких значениях требуемой доходности портфеля и стратегия вложения в единственных актив с максимальной верхней границей интервальной доходности при высоких значениях требуемой доходности портфеля.*

Обоснованность и достоверность результатов, выносимых на защиту, обеспечены применением научной методологии, использованием классических достижений экономической теории, методологии эмпирического анализа, подробным обсуждением адекватности исходных предположений и выдвигаемых гипотез, математическим обоснованием и верификацией полученных решений на реальных данных.

Теоретическая и практическая значимость работы. Разработанные математические методы исследования различных классов интервальных задач имеют самостоятельное теоретическое значение и могут быть активно использованы не только при моделировании социально-экономических, но также физических, инженерно-технических и др. систем. Практическая значимость подтверждается возможностью использования предложенных методов нахождения оптимальных стратегий в реальной экономической деятельности, как на уровне отдельных предприятий, так и на уровне управления региональными и макроэкономическими системами. Диссертационное исследование дает аналитический инструментарий принятия решений предприятиями различных форм собственности и органами государственного управления.

Результаты работы в форме аналитических материалов использованы в деятельности НП «Дальневосточный центр экономического развития» при разработке (участии в разработке) стратегий развития Дальнего Востока и Прибайкалья, города Владивостока, Артемовского городского округа, Славянского городского поселения.

Результаты диссертации используются в учебном процессе кафедры математических методов в экономике Дальневосточного государственного университета в рамках специальных курсов «Интервальные методы и модели экономического анализа», «Теория игр-2», а также при выполнении курсовых и дипломных работ.

Апробация работы. Результаты исследования докладывались на следующих научных школах, конференциях и семинарах:

- XXVIII-й, XXIX-й, XXX-й, XXXI-й международных научных школах-семинарах «Системное моделирование социально-экономических процессов» им. акад. С.С. Шаталина (Москва, Нижний Новгород, Руза, Воронеж, 2005, 2006, 2007, 2008);
- Всероссийской конференции «Равновесные модели экономики и энергетики» в рамках XIV-й Байкальской международной школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения», (Северобайкальск, 2008);
- III-й, IV-й Всероссийских конференциях «Проблемы оптимизации и экономические приложения» (Омск, 2006, 2009);
- Международной конференции «Социально-экономическое развитие Дальнего Востока» (Владивосток, 2005);
- Всероссийской конференции «Математическое программирование и приложения» (Екатеринбург, 2007);
- Третьей Азиатской конференции по управлению (Шанхай, КНР, 2000);
- IV-й международной научной конференции творческой молодежи (Хабаровск, 2005);
- XXV-й, XXX-й, XXXI-й, XXXII-й, XXXIII-й Дальневосточных математических школах-семинарах им. акад. Е.В. Золотова (Владивосток-Хабаровск, 2000, 2005, 2006, 2007, 2008);
- Конференции молодых ученых по математике, математическому моделированию и информатике (Новосибирск, 2001).

Публикации. Результаты диссертации представлены в монографии, статьях, докладах и материалах конференций. Всего по теме диссертации опубликовано 43 работы общим объемом свыше 20 п. л. (авторских). Основные результаты и положения, выносимые на защиту, опубликованы в монографии [1] и рецензируемых научных изданиях, рекомендованных ВАК РФ [2 - 12].

В совместных работах [1, 8, 9, 12, 27, 41, 43] автором самостоятельно сформулированы и доказаны теоретические результаты, проведены вычислительные эксперименты, выкладки и расчеты. В работах [10, 11, 13, 14, 17-20, 22, 24, 25, 34, 36, 39] автором сформулированы постановки задачи, получены основные теоретические результаты, проверены практические следствия. В работах [21, 40] автор принимал участие в построении теоретической модели, постановке и проведении вычислительных экспериментов и интерпретации полученных результатов.

Структура и объем работы. Диссертационная работа общим объемом 343 страницы состоит из введения, семи глав, заключения и списка литературы в 318 наименований, включает 10 таблиц, 30 рисунков.

Диссертационное исследование состоит из двух основных блоков. В первой, теоретико-методологической части работы (гл. 1-3) разрабатываются теоретические концепции и новые методы анализа различных классов интервальных моделей принятия решений, включая задачи линейной и нелинейной оптимизации, управления и теории игр. Вторая часть (гл. 4-7) посвящена применению разработанных в первой части методов решения к новым интервальным моделям микроэкономического, регионального, макроэкономического анализа и финансового планирования.

Во введении обосновывается актуальность темы исследования, анализируется степень ее разработанности; определяются цели и задачи, объект, предмет, методологическая и информационная база исследования, отмечается теоретическая и практическая ценность работы. Вводятся основные обозначения.

Первая глава посвящена обзору развития экономико-математических методов и моделей принятия экономических решений в условиях неопределенности. Выделены различные подходы к принятию экономических решений, проведен их сравнительный анализ. Обосновано применение интервального подхода, связанного с объективной нехваткой информации и ее субъективным восприятием.

Во второй главе излагаются две основные концепции определения решения различных классов задач с интервальной неопределенностью – *универсальные решения* и *показатель интервального неравенства*. На их основе последовательно вводятся формальные определения и методы решения различных классов интервальных оптимизационных задач. Эффективность предлагаемых методов демонстрируется на примерах. Полученные в гл. 2 результаты служат теоретической основой построения моделей управляемых и конфликтных систем (гл. 3), а также методологической базой решения прикладных экономических задач (гл. 4-7).

В третьей главе на основе концепции универсального решения рассматриваются вопросы стабилизации, наблюдаемости и идентификации интервальных динамических управляемых систем, а также методы нахождения равновесия в интервальных бескоалиционных играх с использованием показателя интервального неравенства.

В главе 4 рассматривается принятие индивидуальных субъективных решений в условиях интервальной неопределенности. Предложена интервальная модель оптимизации потребительского выбора; выявлены особенности функции спроса на товары и товарные характеристики.

В главе 5 рассмотрены задачи производственной оптимизации в условиях интервальной неопределенности. Отдельное внимание уделено анализу стратегического поведения на рынках несовершенной конкуренции и оценке риска входа предприятия на конкурентный рынок в условиях ограниченной информации.

В шестой главе рассматриваются интервальные модели межрегионального производственного баланса, стабилизации основных макроэкономических показателей в краткосрочном периоде и идентификации параметров макроэкономических систем в долгосрочном периоде.

В главе 7 формулируются и решаются задачи инвестиционного планирования в условиях высокой неопределенности, включая построение меры риска инвестиционных решений и оптимизации портфеля активов с интервально определенными доходностями.

Система обозначений. Интервальные величины (скаляры, векторы, матрицы, функции и т.д.) обозначены жирным шрифтом: $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \ldots, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$. Для интервального элемента $\mathbf{a}$ используются обозначения нижней (левой) границы $\underline{a}$, верхней (правой) границы $\overline{a}$, центра интервала a_0, радиуса интервала a_Δ. Векторы считаются столбцевыми, операция транспонирования обозначается условным знаком «штрих», $x'y$ есть скалярное произведение вектора x на вектор y. Координаты векторов определены нижними индексами. Прочие обозначения вводятся по мере изложения.

II. ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Первичный анализ неопределенности, присущей процессу принятия решений, требует ее разделения на объективную и субъективную составляющие. *Внешняя*, или *объективная*, неопределенность характеризует количество информации, фактически доступной экономическому агенту. Объективное отсутствие информации следует отличать от *субъективного восприятия* неопределенности. Специфика поведения экономического агента заключается в том, что ему не только доступна не вся информация, но часть ее *теряется* при субъективном анализе. Последний часто сводится к малому числу значимых альтернатив при принятии решения; остальные альтернативы игнорируются.

Проблемы неполного учета психологических особенностей восприятия экономической информации в неоклассическом экономическом анализе привели во второй половине XX в. к парадоксам, развитым и объясняемым в рамках поведенческой и экспериментальной экономики (Д. Канеманн, В. Смит, М.Алле, В. Элсберг и др.) Для выявления общности подобных проблем в работе сформулирована гипотеза о сходстве восприятия экономической информации в экономиках различных стран. Для проверки эмпирической значимости моделей и теорий, построенных западными авторами относительно выбора в условиях риска и неопределенности, в рамках диссертационного исследования проведены опросы российских потребителей. Полученные результаты согласуются с большинством экспериментальных выводов западных экономистов относительно поведения потребителей, не соответствующего классическим моделям потребительского выбора в условиях полной информации и модели ожидаемой полезности, в основе которой лежит объективно-вероятностный подход к описанию неопределенности.

Сравнительный анализ вероятностно-статистического, субъективно-вероятностного, лингвистического, нечеткого, нечетко-интервального и непосредственно интервального подходов к моделированию неопределенных ситуаций позволяет сделать вывод о необходимости использования на практике различных подходов в зависимости от полноты и структуры доступной информации, а также о перспективности интервальных методов моделирования в силу наименьшего количества необходимой для принятия решения информации по сравнению с прочими методами и подходами.

Специфика применения интервального анализа в связи с указанными экономическими проблемами легла в основу разрабатываемых в диссертации новых концепций и методов интервального анализа.

Концепция универсального решения, впервые предложенная Л.Т. Ащепковым, Д.В. Долгим для интервальных систем линейных алгебраических уравнений, получила свое развитие в ряде работ автора [1, 5, 6, 7, 10-12, 15, 24, 27, 29, 31, 32, 35, 38, 41, 42]. Основная идея базируется на принципе экономической эффективности и может быть описана как условие наилучшего «развязывания» интервальной системы ограничений с минимально необходимой для этого дополнительной ресурсной базой. Концепция универсального решения позволяет редуцировать исходную интервальную задачу к детерминированной задаче такого же класса. При этом в определение универсального решения заложена автоматическая регуляризация ограничений, поэтому редуцированные задачи, как правило, разрешимы.

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{A}x = \mathbf{b} \tag{1}$$

с интервальной матрицей $\mathbf{A} \in IR^{m\times n}$ и интервальным вектором $\mathbf{b} \in IR^m$, или, в покоординатной записи, $\sum_{j=1}^{n} \mathbf{a}_{ij} x_j = \mathbf{b}_i$, $\mathbf{a}_{ij} = [\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}]$, $\mathbf{b}_i = [\underline{b}_i, \overline{b}_i]$, $i = 1,2,...,m$, $j = 1,2,...,n$. Здесь $\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}$, $\underline{b}_i, \overline{b}_i$ – заданные вещественные числа – границы интервалов неопределенности, x_j – искомые неизвестные.

В отличие от известных подходов (Б.И. Белов, Е.Г. Анциферов, А.Н. Тихонов, Ю.И. Шокин, И. Хансен, С.П. Шарый, В.К. Горбунов, Т.И. Назаренко и др.) к определению решения системы (1), выделим все допустимые реализации ее коэффициентов, порождающие параметрическое семейство обычных систем линейных алгебраических уравнений. Введем неотрицательный m-вектор ε как характеристику точности выполнения равенств (1). Всякий вектор x, отвечающий условиям

$$-\varepsilon \le Ax - b \le \varepsilon$$

при любых $A \in \mathbf{A} = [A_0 - A_\Delta, A_0 + A_\Delta]$, $b \in \mathbf{b} = [b_0 - b_\Delta, b_0 + b_\Delta]$ назовем ε-решением системы (1). Пары $A \in \mathbf{A}$, $b \in \mathbf{b}$ будем называть *допустимыми*. Здесь и далее условимся понимать матричные и векторные интервалы, неравенства, а также операцию взятия абсолютной величины поэлементно.

За *универсальное решение* системы (1) примем ε-решение с минимальным в некоторой нормировке вектором ε. Отвечающий универсальному решению x вектор ε назовем минимальной невязкой (1).

Теорема 1. [1] *Совместность неравенств* $A_0 x + A_\Delta |x| \le \underline{b} + \varepsilon$, $A_0 x - A_\Delta |x| \ge \overline{b} - \varepsilon$ *необходима и достаточна для того, чтобы вектор* $x \in R^n$ *был* ε*-решением системы (1).*

Определим норму неотрицательного вектора ε как сумму его координат. В силу теоремы 1 приходим к нелинейной задаче

$$e'\varepsilon \to \min,\ A_0 x + A_\Delta |x| - \varepsilon \le \underline{b},\ -A_0 x + A_\Delta |x| - \varepsilon \le -\overline{b},\ \varepsilon \ge 0$$

с неизвестными векторами x, ε, редуцируемой к задаче линейного программирования введением вектора s вспомогательных переменных:

$$e'\varepsilon \to \min,\ A_0 x + A_\Delta s - \varepsilon \le \underline{b},\ -A_0 x + A_\Delta s - \varepsilon \le -\overline{b},\ -s \le x \le s,\ \varepsilon \ge 0. \tag{2}$$

Здесь e – вектор с единичными координатами.

Теорема 2. [1] *Задача линейного программирования (2) разрешима. Если $(x^*, \varepsilon^*, s^*)$ – ее оптимальный план, то x^* – универсальное решение, ε^* – минимальная невязка системы (1).*

Выбор нормы невязки в виде суммы неотрицательных координат позволяет сохранить линейность задачи (2) и способствует применению хорошо разработанной теории линейного программирования. Однако, выбор евклидовой нормы и замена целевой функции в (2) на условие $\|\varepsilon\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 \to \min$ приводит к задаче квадратичного программирования, что также можно рассматривать как одну из возможных альтернатив определения решения. Появление дополнительной информации об отдельных уравнениях исходной системы (1) может приводить к различной значимости невязок каждого из уравнений, что в общем случае влечет появление весовых множителей для компонент невязки ε.

Наряду с универсальным решением уравнения (1) введем более грубое, но легче находимое субуниверсальное решение, отвечающее в предположении $rank(A_0) = m \le n$ центральной системе

$$A_0 x = b_0. \tag{3}$$

Из всех решений системы (3) наибольший интерес с точки зрения уменьшения невязки представляет нормальное решение

$$\hat{x} = A_0^+ b_0, \; A_0^+ = A_0'(A_0 A_0')^{-1}, \tag{4}$$

имеющее минимальную евклидову норму. Решение (4) назовем *субуниверсальным* решением интервальной системы (1).

Из теории двойственности нетрудно получить оценку близости

$$0 \le e'\hat{\varepsilon} - e'\varepsilon^* \le e' A_\Delta |\hat{x}| \tag{5}$$

невязок $\varepsilon^*, \hat{\varepsilon}$ системы (1) на универсальном и субуниверсальном решениях соответственно: их нормы отличаются на величину, пропорциональную норме матрицы A_Δ. В частном случае ($A_\Delta = O$) универсальное и субуниверсальное решения совпадают; норма оптимальной невязки становится равной $e'b_\Delta$, что определяет *минимальные потребности расширения ресурсной базы для обеспечения существования решения при любых допустимых* $A \in \mathbf{A}$, $b \in \mathbf{b}$.

Показатель интервального неравенства, предложенный в диссертационной работе, использует принцип равноценного учета неопределенности для всех интервальных величин в рамках исследуемой модели. Данный показатель хорошо аппроксимирует вероятность выполнения соответствующего неравенства, что позволяет интерпретировать его значение как *одну из возможных мер риска*, используемых при описании целевых критериев и систем ограничений интервальных оптимизационных задач.

Для замкнутых вещественных интервалов $\mathbf{u}=[u_0-u_\Delta,\ u_0+u_\Delta]$, $\mathbf{v}=[v_0-v_\Delta,\ v_0+v_\Delta]$ с центрами u_0, v_0 радиуса $u_\Delta \geq 0$, $v_\Delta \geq 0$ введем вещественный показатель

$$R(\mathbf{u} \leq \mathbf{v}) = \frac{v_0 - u_0}{u_\Delta + v_\Delta} \tag{6}$$

интервального неравенства $\mathbf{u} \leq \mathbf{v}$. В работе сформулированы и доказаны свойства показателя (6), найдена связь показателя и вероятности выполнения интервального неравенства. В частности, *показатель* $R(\mathbf{u} \leq \mathbf{v}) \geq 1$ $(R(\mathbf{u} \leq \mathbf{v}) \leq -1)$ *гарантирует выполнение неравенства* $\mathbf{u} \leq \mathbf{v}$ $(\mathbf{v} \leq \mathbf{u})$ *для всех* $u \in \mathbf{u}$, $v \in \mathbf{v}$ *с вероятностью 1; при* $-1 \leq R(\mathbf{u} \leq \mathbf{v}) \leq 1$ *справедлива приближенная формула* $P(\mathbf{u} \leq \mathbf{v}) \approx 0.5(1 + R(\mathbf{u} \leq \mathbf{v}))$ *связи вероятности* $P(\mathbf{u} \leq \mathbf{v})$ *и показателя* $R(\mathbf{u} \leq \mathbf{v})$.

Идею сравнения интервалов можно обобщить для решения системы линейных интервальных неравенств

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{a}_{ij} x_j \leq \mathbf{b}_i,\ i = 1,2,\ldots,m \tag{7}$$

относительно вектора переменных $x = (x_1,\ldots,x_n)'$. *Решениями системы (7) с векторным показателем, покоординатно не меньшим ρ, служат те и только те векторы x, которые удовлетворяют всем неравенствам*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{0,ij} x_j + \rho \sum_{j=1}^{n} a_{\Delta,ij} |x_j| \leq b_{0,i} - \rho b_{\Delta,i},\ i = 1,2,\ldots,m. \tag{8}$$

Множество X_ρ всех решений (8) обладает *свойством монотонности по включению:* $X_{\rho^1} \supseteq X_{\rho^2}$, *если* $\rho^1 \leq \rho^2$. Следовательно, вероятность совместности условий (7) связана с максимальным $\rho \in [-1,1]$, при котором $X_\rho \neq \varnothing$. Если при $\rho = 0$ множество X_0 не пусто, найденное с наперед заданной точностью $\rho^* \geq 0$ дает нижнюю оценку $(0.5(1+\rho^*))^m$ вероятности совместности интервальной системы (7). В противном случае $(X_\rho = \varnothing)$ вероятность совместности (7) не превосходит $(0.5)^m$.

Рассматривая (1) как систему интервальных неравенств $\mathbf{A}x \leq \mathbf{b}$, $\mathbf{A}x \geq \mathbf{b}$ по аналогии с (7), (8) приходим (в векторно-матричной форме) к системе

$$A_0 x + \rho A_\Delta |x| \leq b_0 - \rho b_\Delta,\ A_0 x - \rho A_\Delta |x| \geq b_0 + \rho b_\Delta \tag{9}$$

со скалярным параметром ρ.

Из (9) непосредственно следует $\rho \leq 0$; сохраняется монотонность по ρ множества решений X_ρ системы (9). В частности, если при максимальном $\rho = 0$ множество решений X_0 не пусто, то система неравенств (9) преобразуется к *центральной* системе уравнений $A_0 x = b_0$.

В диссертации предложено двухэтапное решение канонической задачи линейного программирования с интервальными ограничениями:

$$c'x \to \max,\ \mathbf{A}x = \mathbf{b},\ x \geq 0. \tag{10}$$

На первом шаге применение концепции универсального решения к системе ограничений позволяет построить вспомогательную задачу линейного программирования для определения минимальной невязки

$$\varepsilon_{m+1} \to \min, \ -\underline{A}x - \varepsilon \le -\overline{b}, \ \overline{A}x - \varepsilon \le \underline{b}, \ e'\varepsilon - \varepsilon_{m+1} \le 0, \ x \ge 0, \ \varepsilon \ge 0. \quad (11)$$

Здесь x, ε, ε_{m+1} – неизвестные, e – вектор из R^m с единичными координатами, $e'\varepsilon$ – сумма координат (норма) невязки ε. Линейная форма ограничена снизу нулем и ограничения совместны, поэтому она имеет хотя бы один оптимальный план $(\hat{x}, \hat{\varepsilon}, \hat{\varepsilon}_{m+1})$.

На втором шаге фиксируется норма $\hat{\varepsilon}_{m+1}$ минимальной невязки и решается задача линейного программирования

$$c'x \to \max, \ -\underline{A}x - \varepsilon \le -\overline{b}, \ \overline{A}x - \varepsilon \le \underline{b}, \ e'\varepsilon \le \hat{\varepsilon}_{m+1}, \ x \ge 0, \ \varepsilon \ge 0. \quad (12)$$

В предположении $e'A_\Delta > 0$ задача (12) разрешима, ее решение названо *оптимальным универсальным планом* интервальной задачи (10).

Для задачи линейного программирования

$$c'x \to \max, \ \mathbf{A}x \le \mathbf{b}, \ x \ge 0 \quad (13)$$

с интервальной системой ограничений-неравенств неотрицательный вектор x, удовлетворяющий условиям (8), назовем *ρ-планом* задачи (13). При фиксированном ρ нахождение оптимального ρ-плана задачи (13) сводится к детерминированной задаче линейного программирования

$$c'x \to \max, \ (A_0 + \rho A_\Delta)x \le b_0 - \rho b_\Delta, \ x \ge 0.$$

Анализ моделей и задач производственной оптимизации в условиях интервальной неопределенности требует формализации понятия локального экстремума интервальных функций

$$\mathbf{f}(x) = [f_0(x) - f_\Delta(x), f_0(x) + f_\Delta(x)], \ x \in X \subset R^n \quad (14)$$

с достаточно гладкими функциями центров $f_0(x)$ и радиусов $f_\Delta(x)$.

Назовем $x^* \in X$ *точкой локального ρ-минимума* функции $\mathbf{f}(x)$ на X, если найдется окрестность $M_\rho \subset X$, что для всех $x \in M_\rho$ справедливо неравенство

$$R(\mathbf{f}(x^*) \le \mathbf{f}(x)) = \frac{f_0(x) - f_0(x^*)}{f_\Delta(x) + f_\Delta(x^*)} \ge \rho. \quad (15)$$

Число ρ есть нижняя оценка показателя интервального неравенства $\mathbf{f}(x^*) \le \mathbf{f}(x)$ в окрестности M_ρ. Поскольку неравенство (15) должно выполняться и при $x = x^*$, то $\rho \le 0$. При $\rho = 0$ каждая точка локального 0-минимума функции $\mathbf{f}(x)$ является точкой обычного локального минимума *центральной функции* $f_0(x)$. Переписывая (15) в виде $f_0(x) - \rho f_\Delta(x) \ge f_0(x^*) + \rho f_\Delta(x^*)$, легко показать, что параметр $\rho \le 0$ определяет монотонную по включению окрестность локализации экстремума интервальной функции (14): $M_{\rho_1} \supseteq M_{\rho_2}$ при $\rho_1 \le \rho_2$.

Для нахождения локального минимума скалярной интервальной функции $\mathbf{f}(x)$, $x \in X \subset R$ с дважды дифференцируемыми в компактной области определения X функциями центров и радиусов введем первую и вторую производные функции $\mathbf{f}(x)$ по правилам

$$\frac{d\mathbf{f}(x)}{dx} = \left[\frac{df_0(x)}{dx} - \left|\frac{df_\Delta(x)}{dx}\right|, \frac{df_0(x)}{dx} + \left|\frac{df_\Delta(x)}{dx}\right|\right], \tag{16}$$

$$\frac{d^2\mathbf{f}(x)}{dx^2} = \left[\frac{d^2 f_0(x)}{dx^2} - \left|\frac{d^2 f_\Delta(x)}{dx^2}\right|, \frac{d^2 f_0(x)}{dx^2} + \left|\frac{d^2 f_\Delta(x)}{dx^2}\right|\right]. \tag{17}$$

Определения (16), (17) обоснованы в диссертации параметрическим и инфинитезимальным анализом и обобщают известные подходы А.П. Вощинина, В.И. Левина к определению экстремума интервальных функций.

Опираясь на понятие универсального решения, на основе интервального уравнения $\dfrac{d\mathbf{f}(x)}{dx} = 0$ сформулируем детерминированную задачу

$$\varepsilon \to \min,\ \frac{df_0(x)}{dx} - s + \varepsilon \ge 0,\ \frac{df_0(x)}{dx} + s - \varepsilon \le 0,\ -s \le \frac{df_\Delta(x)}{dx} \le s, \varepsilon \ge 0 \tag{18}$$

с неизвестными x, s и ε. Компонента x^* решения задачи (18) названа *универсальной стационарной точкой* интервальной функции $\mathbf{f}(x)$, а также *точкой относительного ρ-минимума*, если в дополнение к (18) справедливо неравенство

$$R\left(0 \le \frac{d^2\mathbf{f}(x^*)}{dx^2}\right) \ge \rho .$$

Аналогичные рассуждения применительно к задаче на безусловный экстремум интервальной функции $\mathbf{g}(x)$ векторного аргумента $x \in X \subset R^n$ приводят к определению градиента функции $\mathbf{g}(x)$ в виде векторного интервала

$$\nabla\mathbf{g}(x) = \left[\nabla g_0(x) - |\nabla g_\Delta(x)|, \nabla g_0(x) + |\nabla g_\Delta(x)|\right].$$

Универсальное решение интервальной векторной системы $\nabla\mathbf{g}(x) = 0$ сводится в работе к задаче нелинейного программирования

$$\varepsilon \to \min,\ \nabla g_0(x) - s + \varepsilon \ge 0, \nabla g_0(x) + s - \varepsilon \le 0, -s \le \nabla g_\Delta(x) \le s, \varepsilon \ge 0 . \tag{19}$$

Компонента x^* решения задачи (19) названа в работе *универсальной стационарной точкой* интервальной функции $\mathbf{g}(x)$.

Определив интервальный гессиан по правилу

$$\mathbf{H}_{\mathbf{g}}(x) = \left(\frac{\partial^2\mathbf{g}(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right),\ \ \frac{\partial^2\mathbf{g}(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \left[\frac{\partial^2 g_0(x)}{\partial x_i \partial x_j} - \left|\frac{\partial^2 g_\Delta(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right|, \frac{\partial^2 g_0(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \left|\frac{\partial^2 g_\Delta(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right|\right],$$

$$i, j = 1,2,\ldots,n,$$

для проверки его положительной определенности используем известные результаты Н.А. Бобылева, С.В. Емельянова, С.К. Коровина, Р.С. Ивлева либо введенное в работе *определение относительного ρ-оптимума на основе критерия Сильвестра*. Для этого по правилам классической интервальной арифметики вычисляем интервальные значения $\mathbf{D}_i$, $i = 1,2,...,n$, главных диагональных миноров и требуем выполнения системы условий $R(0 \le \mathbf{D}_i) \ge \rho$, $i = 1,2,...,n$.

В тексте диссертации приведены примеры и графические иллюстрации поиска точек относительного ρ-оптимума в задачах одномерной и многомерной безусловной интервальной нелинейной оптимизации.

Для исследования вопросов управляемости, наблюдения, стабилизации и идентификации интервальных управляемых систем рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u \tag{20}$$

с неопределенными непрерывными при $t \ge 0$ матрицами $A(t)$, $B(t)$ из соответствующих интервалов $\mathbf{A}(t) = [A_0(t) - A_\Delta(t), A_0(t) + A_\Delta(t)]$, $\mathbf{B}(t) = [B_0(t) - B_\Delta(t), B_0(t) + B_\Delta(t)]$. В силу неопределенности коэффициентов система (20) каждому выбранному управлению – кусочно-непрерывной функции $u(t) \in R^r$ – ставит в соответствие *пучок* траекторий, отвечающих всем *допустимым* $A(t) \in \mathbf{A}(t)$, $B(t) \in \mathbf{B}(t)$. Состояние $x = 0$ естественно назвать точкой покоя, поскольку процесс $x(t) \equiv 0$, $u(t) \equiv 0$ удовлетворяет (20) при любых допустимых $A(t)$, $B(t)$. Детерминированную систему вида $\dot{x} = A_0(t)x + B_0(t)u$ назовем *центральной*.

Введем специальные обозначения $F(t,\tau)$, $F_0(t,\tau)$, $\overline{F}(t,\tau)$, $F_{|0|}(t,\tau)$ для фундаментальных матриц соответствующих систем $\dot{x} = A(t)x$, $\dot{x} = A_0(t)x$, $\dot{x} = (|A_0(t)| + A_\Delta(t))x$, $\dot{x} = |A_0(t)|x$ с начальным условием $x(0) = x^0$.

Лемма 1. *В принятых обозначениях для допустимых матриц $A(t)$ справедливо неравенство* $|F(t,\tau) - F_0(t,\tau)| \le \overline{F}(t,\tau) - F_{|0|}(t,\tau) \equiv F_\Delta(t,\tau)$.

Из леммы 1 легко находим оценку

$$|x(t) - x_0(t)| \le F_\Delta(t,0)|x^0| + \int_0^t \big(F_\Delta(t,\tau)(|B_0(\tau)| + B_\Delta(\tau)) + |F_0(t,\tau)|B_\Delta(\tau)\big)|u(\tau)|d\tau$$

пучка траекторий системы (20).

Ориентируясь на закон управления $u(t) = K_0(T,t)'v$, $K_0(T,t) = F_0(T,t)B_0(t)$, отвечающий центральной системе, сведем анализ управляемости системы (20) из состояния $x(0)=x^0$ в состояние $x(T)=0$ за время $T>0$ при фиксированных $A(t)$, $B(t)$ к решению системы линейных алгебраических уравнений

$$F(T,0)x^0 + \left(\int_0^T K(T,t)K_0(T,t)'dt\right)v = 0 \tag{21}$$

относительно вектора v. Полагая $D = \int_0^T K(T,t)K_0(T,t)'dt$, $f = -F(T,0)x^0$, перепишем (21) в виде

$$Dv = f. \tag{22}$$

Построив с использованием леммы 1 внешние интервальные оценки

$$|D - D_0| \le D_\Delta,\ |f - f_0| \le f_\Delta, \tag{23}$$

$$D_0 = \int_0^T K_0(T,t)K_0(T,t)'dt,\ \ f_0 = -F_0(T,0)x^0,\ \ f_\Delta = F_\Delta(T,0)\left|x^0\right|,$$

$$D_\Delta = \int_0^T \left(F_\Delta(T,t)\left(\left|B_0(t)\right| + B_\Delta(t)\right) + \left|F_0(T,t)\right|B_\Delta(t)\right)\left|B_0(t)'F_0(T,t)'\right|dt,$$

приходим к интервальной алгебраической системе (22), (23), редуцируя которую к задаче линейного программирования

$$e'\varepsilon \to \min,$$

$$D_0v + D_\Delta s - \varepsilon \le f_0 - f_\Delta, - D_0v + D_\Delta s - \varepsilon \le -f_0 - f_\Delta, - s \le v \le s, \varepsilon \ge 0,$$

находим универсальное решение v^*.

Субуниверсальное решение интервальной системы (22), (23) удовлетворяет системе уравнений $D_0 v = f_0$. В условиях полной управляемости центральной системы матрице D_0 полного ранга отвечает единственное субуниверсальное решение

$$\hat{v} = D_0^{-1} f_0. \tag{24}$$

Выделим универсальное и субуниверсальное управления

$$u^*(t) = K_0(T,t)'v^*,\quad \hat{u}(t) = K_0(T,t)'\hat{v},$$

под воздействием которых пучок траекторий интервальной системы (20) отвечает поэлементной оценке

$$\left|x(t) - x_0(t)\right| \le M(t)\left|x^0\right|,\ \ M(t) = F_\Delta(t,0) + D_\Delta\left|D_0^{-1}F_0(T,0)\right|.$$

Норма матрицы $\|M(t)\|$ характеризует величину уклонения пучка траекторий от центральной траектории. При $t=T$ из неравенства

$$\|M(T)\| \le q < 1 \tag{25}$$

следует $\|x(T)\| < \left\|x^0\right\|$. В этом случае матрица $M(T)$ выполняет роль оператора сжатия фазового пространства. В предположении (25) последовательное применение управления $\hat{u}(t)$ на полуотрезках $[0,T)$, $[T,2T)$, ... равносильно многократному действию оператора сжатия, что обеспечивает притяжение всех траекторий системы к началу координат.

Продолжая субуниверсальное управление по индукции на полуось $[0, +\infty)$, на полуотрезках $[(k-1)T, kT)$, $k = 2, 3, \ldots$, положим

$$\hat{u}(t) = K_0(kT,t)'\hat{v}^{k-1},\ \ (k-1)T \le t < kT, \tag{26}$$

$$\hat{v}^{k-1} = -(D_{0k})^{-1} F_0(kT,(k-1)T)\hat{x}((k-1)T),\ D_{0k} = \int_{(k-1)T}^{kT} K_0(kT,t)K_0(kT,t)'dt,$$

$$D_{\Delta,k} = \int_{(k-1)T}^{kT} \left|\left[F(kT,t)\left(|B_0(t)| + B_\Delta(t)\right) + |F_0(kT,t)|B_\Delta(t)\right]K_0(kT,t)'\right|dt,$$

$$M_k = F_\Delta(kT,(k-1)T) + D_{\Delta,k}\left|(D_{0k})^{-1} F_0(kT,(k-1)T)\right|.$$

Обратимость матриц D_{0k} при k = 1, 2, … обеспечивается предположением о полной управляемости центральной системы на каждом отрезке $[(k-1)T, kT]$.

Теорема 3. *Пусть для всех k =1, 2, ... матрицы D_{0k} неособенные, а матрицы M_k удовлетворяют условию $\|M_k\| \le q < 1$. Тогда управление (26) обеспечивает притяжение каждой траектории интервальной системы (20) к положению равновесия x=0.*

Для интервальной наблюдаемой системы

$$\dot{x} = A(t)x,\ y(t) = C(t)x(t),\ A(t) \in \mathbf{A}(t),\ C(t) \in \mathbf{C}(t),\ t \ge 0,$$

где $y(t)$ из R^m – вектор измерений фазового состояния $x(t)$, $A(t)$, $C(t)$ – неопределенные непрерывные матрицы размерностей $n\times n$, $m\times n$ соответственно, $m \le n$, строится оценка неизвестного начального состояния $x(0)=x^0$, точность которой зависит от радиусов $A_\Delta(t), C_\Delta(t)$ интервалов $\mathbf{A}(t), \mathbf{C}(t)$.

Применив к измерениям $y(t) = C(t)x(t) = C(t)F(t,0)x^0$, $0 \le t \le \theta$, линейное интегральное преобразование с ядром $F_0(t,0)'C_0(t)'$, получим систему линейных алгебраических уравнений

$$Wx^0 = g \tag{27}$$

относительно вектора x^0 с матричными коэффициентами

$$W = \int_0^\theta F_0(t,0)'C_0(t)'C(t)F(t,0)dt,\ g = \int_0^\theta F_0(t,0)'C_0(t)'y(t)dt.$$

Матрица W размерности $n\times n$ здесь зависит от неопределенных матриц $A(t)$, $C(t)$ и, по существу, неизвестна. Вектор g размерности $n\times 1$, напротив, определен однозначно измерениями $y(t)$.

Устанавливая оценку

$$|W - W_0| \le W_\Delta, \tag{28}$$

$$W_0 = \int_0^\theta F_0(t,0)'C_0(t)'C_0(t)F_0(t,0)dt,$$

$$W_\Delta = \int_0^\theta \left|F_0(t,0)'C_0(t)'\right|\left(\left(|C_0(t)| + C_\Delta(t)\right)F_\Delta(t,0) + C_\Delta(t)|F_0(t,0)|\right)dt,$$

систему (27), несколько упрощая, считаем интервальной. В качестве оценки начального состояния x^0 принимаем универсальное x^{0*} или субуниверсальное $\hat{x}^0$ решения системы (27), (28). В условиях полной наблюдаемости центральной системы $\dot{x} = A_0(t)x$, $y(t) = C_0(t)x(t)$, $t \geq 0$, матрица W_0 обратима, следовательно $\hat{x}^0 = W_0^{-1}g$. В работе доказано неравенство $\left|x^0 - \hat{x}^0\right| \leq \left|W_0^{-1}\right| W_\Delta \left|x^0\right|$, позволяющее судить о точности оценки $\hat{x}^0$.

Использование изложенной выше процедуры для построения оценки фазовой траектории управляемой системы

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u,\ A(t) \in \mathbf{A}(t),\ B(t) \in \mathbf{B}(t) \tag{29}$$

по интервальным наблюдениям

$$y(t) = C(t)x(t),\ C(t) \in \mathbf{C}(t),\ t \geq 0 \tag{30}$$

осложняется неоднородностью в правой части (29), связанной с управлением $u(t)$. Поэтому для нахождения стабилизирующего управления системы (29), (30) предлагается использовать двухфазную процедуру стабилизации.

Пусть $0<\theta<T$. Выделяя этапы пассивного наблюдения $t \in [(k-1)T, (k-1)T + \theta)$ и активного управления $t \in [(k-1)T + \theta, kT)$, $k = 1,2,\ldots$, положим

$$u(t) \equiv 0,\ (k-1)T \leq t < (k-1)T + \theta, \tag{31}$$

$$u(t) = K_0(kT,t)'\hat{v}^{k-1},\ (k-1)T + \theta \leq t < kT,$$

$$\hat{v}^{k-1} = -\left(\hat{D}_{0k}\right)^{-1} F_0(kT,(k-1)T)\hat{x}((k-1)T),\ D_{0k} = \int\limits_{(k-1)T+\theta}^{kT} K_0(kT,t)K_0(kT,t)'dt.$$

В работе доказана **теорема 4** *о достаточных условиях асимптотической стабилизации наблюдаемой системы (29), (30) на основе управления (31).*

Для нелинейной системы *n* обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x,u,v) \tag{32}$$

с векторами $x \in R^n$, $u \in R^r$, $v \in R^q$ состояния, управления и неопределенных параметров определим интервальное уравнение наблюдения

$$y(t) = Cx(t),\ C \in \mathbf{C},\ t \geq 0, \tag{33}$$

отвечающее выбранному управлению $u(t)$.

Пусть (1^0) множество $V \subset R^q$ изменения параметров v компактно и не зависит от t; (2^0) существует малая окрестность $X \times U$ точки (0,0), в которой функция $f(x,u,v)$ при каждом $v \in V$ имеет частные производные первого и второго порядка по совокупности переменных (x,u); производные f_x, f_u, f_{xx}, f_{xu}, f_{uu} непрерывны на замыкании множества $X \times U \times V$; (3^0) тождественно по $v \in V$ выполнено условие $f(0,0,v)=0$; (4^0) управлениями служат кусочно-непрерывные при $t \geq 0$ функции $u(t)$ со значениями в U.

Линеаризуя систему (32) в малой окрестности $X_1 \times U_1$ точки (0, 0),

$$\dot{x} \approx A(v)x + B(v)u, \tag{34}$$

найдем существующие в силу предположения 2^0 поэлементные нижние и верхние оценки матриц $A(v)$, $B(v)$:

$$\underline{A} \le A(v) \le \overline{A}, \underline{B} \le B(v) \le \overline{B}. \qquad (35)$$

На основе (34), (35) сформируем систему линейных дифференциальных уравнений с интервальными коэффициентами

$$\delta\dot{x} = A\delta x + Bu(t),\ A \in \mathbf{A} = [\underline{A}, \overline{A}],\ B \in \mathbf{B} = [\underline{B}, \overline{B}].$$

Здесь через δx обозначено состояние линеаризованной системы.

Для построения стабилизирующего управления проводится анализ нелинейной и линеаризованной систем на отрезке времени $[0, T]$ длины $T>0$. Применяя двухэтапную процедуру, на первом шаге $t \in [0,\theta)$ строим оценку начального состояния x^0, используемую на втором шаге $t \in [\theta, T)$ для построения субуниверсального управления $\hat{u}(t)$, которое обеспечивает приближение траекторий нелинейной системы к началу координат. Последовательными сдвигами по времени управление $\hat{u}(t)$ определяется на полуотрезках $[(k-1)T, kT)$, $k = 2, 3, \ldots$ и продолжается на всю полуось $t \ge 0$. В предположениях $1^0 - 4^0$ и условиях полной управляемости и наблюдаемости центральной линеаризованной системы

$$\delta\dot{x}_0 = A_0\delta x_0 + B_0u(t),\ y_0(t) = C_0\delta x_0(t), t \ge 0 \qquad (36)$$

построим управление

$$\hat{u}(t) \equiv 0,\ (k-1)T \le t < (k-1)T + \theta, \qquad (37)$$

$$\hat{u}(t) = -B_0{}' e^{(kT-t)A_0{}'} \hat{D}_0^{-1} e^{TA_0} W_0^{-1} \int\limits_{(k-1)T}^{(k-1)T+\theta} e^{tA_0{}'} C_0{}' y(t)dt,\quad (k-1)T + \theta \le t < kT.$$

Существование обратных матриц $\hat{D}_0^{-1}$ и W_0^{-1} в (37) гарантируется условиями полной управляемости и наблюдаемости системы (36).

Теорема 5. *Пусть система (32) с интервальным наблюдением (33) отвечает предположениям $1^0 - 4^0$ и для центральной линеаризованной системы (36) выполняются условия полной управляемости и наблюдаемости. Тогда существует такая окрестность X начала координат, что все траектории системы (32), отвечающие управлению (37), начальным состояниям $x^0 \in X$ и неопределенным параметрам $v \in V$, асимптотически притягиваются к точке покоя $x = 0$.*

Предложенная процедура стабилизации существенно упрощается, если состояние системы (32) допускает точные периодические измерения в моменты времени kT, $k = 0, 1, 2, \ldots$. При этом существенно уменьшаются вычислительные трудности построения управления $\hat{u}(t)$.

Задача идентификации постоянного вектора параметров w в линейной интервальной системе

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)w,\ x(0) = x^0,\ A(t) \in \mathbf{A}(t),\ B(t) \in \mathbf{B}(t) \qquad (38)$$

с однородным уравнением интервального наблюдения

$$y(t) = C(t)x(t),\ C(t) \in \mathbf{C}(t),\ 0 \le t \le T \qquad (39)$$

также может быть эффективно решена применением концепций универсального и субуниверсального управлений. Здесь $x(t)$ – фазовый n-

вектор, w – искомый r-вектор параметров, $y(t)$ – m-вектор результатов измерения фазового состояния $x(t)$, T – заданный положительный момент времени.

Зафиксируем допустимые матрицы $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ и опишем динамику системы (38) на отрезке времени $0 \le t \le T$ с использованием формулы Коши: $x(t) = F(t,0)x^0 + K(t)w$, $K(t) = \int_0^t F(t,\tau)B(\tau)d\tau$. Подставляя траекторию $x(t)$ в уравнение наблюдения (39), свяжем известные измерения $y(t)$ с неизвестными коэффициентами $A(t), B(t), C(t)$ и параметром w,

$$y(t) = C(t)x(t) = C(t)\left(F(t,0)x^0 + K(t)w\right), \qquad 0 \le t \le T,$$

и применяя линейное интегральное преобразование с ядром $K_0(t)'C_0(t)'$, получим систему линейных алгебраических уравнений

$$Vw = g \tag{40}$$

относительно вектора w с матричными коэффициентами

$$V = \int_0^T K_0(t)'C_0(t)'C(t)K(t)dt, \quad g = \int_0^T K_0(t)'C_0(t)'\left(y(t) - C(t)F(t,0)x^0\right)dt.$$

Полагая

$$V_0 = \int_0^T K_0(t)'C_0(t)'C_0(t)K_0(t)dt, \quad g_0 = \int_0^T K_0(t)'C_0(t)'\left(y(t) - C_0(t)F_0(t,0)x^0\right)dt,$$

устанавливаем внешние интервальные оценки

$$|V - V_0| \le V_\Delta, \qquad |g - g_0| \le g_\Delta, \tag{41}$$

$$V_\Delta = \int_0^T |K_0(t)'C_0(t)'|\left[|C_0(t)|K_\Delta(t) + C_\Delta(t)|K_0(t)| + C_\Delta(t)K_\Delta(t)\right]dt,$$

$$g_\Delta = \int_0^T |K_0(t)'C_0(t)'|\left(\left(|C_0(t)| + C_\Delta(t)\right)F_\Delta(t,0) + C_\Delta(t)|F_0(t,0)|\right)|x^0|dt.$$

Универсальное решение интервальной алгебраической системы (40), (41) сводится к задаче линейного программирования

$$e'\varepsilon = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \to \min_{v,\varepsilon}, \tag{42}$$

$$V_0w + V_\Delta s - \varepsilon \le g_0 - g_\Delta, \; -V_0w + V_\Delta s - \varepsilon \le -g_0 - g_\Delta, \; -s \le w \le s, \; \varepsilon \ge 0.$$

Важно заметить, что техника построения универсальных решений в силу разрешимости задачи (42) не требует формально каких-либо допущений о свойствах наблюдаемости. Однако, с практической точки зрения, чем хуже «качество» исходной интервальной системы (38), (39), то есть чем шире интервалы неопределенности, тем более грубой будет оценка w^* идентифицируемого вектора w. В частности, при вырожденных матрицах наблюдения $(C_0(t) \equiv C_\Delta(t) \equiv 0)$ ограничения задачи (42) не зависят от векторов w и s и сводятся к неравенству $\varepsilon \geq 0$, при этом оптимальная невязка $\varepsilon^* = 0$.

Поэтому в ряде случаев вместо универсального решения интервальной системы (40), (41) удобнее использовать субуниверсальное решение $\hat{w} = V_0^{-1} g_0$, опирающееся на центральную систему $\dot{x}(t) = A_0(t)x(t) + B_0(t)w$, $y(t) = C_0(t)x(t)$, $0 \leq t \leq T$ в предположении невырожденности матрицы V_0.

В диссертации рассмотрены упрощения, возникающие при $x(0) = x^0 = 0$, а также обобщение задачи (38), (39) с одновременной идентификацией начального состояния x^0. Приведен пример идентификации.

Для исследования процессов принятия решений на основе игрового подхода к описанию критериев в диссертации рассмотрены бескоалиционные игры конечного числа лиц с интервальными функциями выигрыша. Введено понятие равновесной ситуации, предлагается редукция к детерминированным бескоалиционным играм и выясняются свойства редуцированных игр. Отдельное внимание уделяется интервальным антагонистическим и биматричным играм.

Модель рассматриваемой интервальной игры допускает, что выигрышем каждого участника может быть любое вещественное число из некоторого интервала и дополнительная информация о распределении выигрышей внутри этого интервала отсутствует. Выбором стратегий игроки могут влиять на интервалы своих выигрышей и находить предпочтительные для себя.

Введем интервальную бескоалиционную игру

$$\mathbf{\Gamma}_n = \langle X_1, X_2, ..., X_n, \mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2, ..., \mathbf{H}_n \rangle \tag{43}$$

с множеством $N = \{1, 2, ..., n\}$ игроков, которые независимым выбором стратегий x_i из соответствующих множеств стратегий X_i формируют ситуацию $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ в игре. Когда ситуация x полностью сформирована, каждый игрок i получает в качестве выигрыша некоторое вещественное число из интервала

$$\mathbf{H}_i(x) = \lfloor H_{0,i}(x) - H_{\Delta,i}(x), H_{0,i}(x) + H_{\Delta,i}(x) \rfloor. \tag{44}$$

Все интервальные функции (44) предполагаются заданными на множестве ситуаций $X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$. Цель каждого игрока i заключается в максимизации своей функции выигрышей $\mathbf{H}_i(x)$ выбором стратегии $x_i \in X_i$. Решение игры состоит в нахождении приемлемых для них *интервалов* возможных выигрышей.

Для *вырожденных* интервалов (44) с *нулевыми радиусами* игра (43) превращается в *центральную* бескоалиционную игру

$$\Gamma_{0n}(x) = \langle X_1, X_2, ..., X_n, H_{0,1}, H_{0,2}, ..., H_{0,n} \rangle. \tag{45}$$

Стратегические предпочтения игроков в игре $\mathbf{\Gamma}_n$ формируются путем сравнения интервалов выигрышей на основе показателя интервального неравенства. Пусть x^* – некоторая ситуация в игре (43). Обозначим символом $x^*\|x_i = (x_1^*,...x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*,...x_n^*)$ новую ситуацию, полученную из x^* заменой стратегии x_i^* на x_i. Очевидно, $x^*\|x_i^* = x^*$, $i \in N$. Ситуацию x^* назовем *приемлемой* для игрока i, если она обеспечивает ему предпочтительный интервал выигрышей $\mathbf{H}_i(x^*)$ с заданным показателем ρ_i:

$$R(\mathbf{H}_i(x^*\|x_i) \le \mathbf{H}_i(x^*)) \ge \rho_i \tag{46}$$

для всех $x_i \in X_i$, или, равносильно,

$$H_{0,i}(x^*) - \rho_i H_{\Delta,i}(x^*) \ge H_{0,i}(x^*\|x_i) + \rho_i H_{\Delta,i}(x^*\|x_i)\,,\ x_i \in X_i\,. \tag{47}$$

Для того чтобы неравенство (46) выполнялось с положительной вероятностью и было справедливым при $x_i = x_i^*$, примем $-1 < \rho_i \le 0$. Зафиксируем *вектор показателей* $\rho = (\rho_1, \rho_2, ..., \rho_n)$ из куба $(-1,0]^n$. Ситуацию x^* определим как *ρ-равновесную* в игре $\mathbf{\Gamma}_n$, если она приемлема для каждого игрока $i \in N$.

Таким образом, нахождение множества $X^*(\rho)$ ρ-равновесных ситуаций игры (43) сводится к решению системы неравенств (47) при любых $x_i \in X_i$ и $i \in N$.

В работе сформулированы и доказаны свойства ρ-равновесных ситуаций. Выявлено, что *центральная редуцированная игра* (45) *предпочтительна для игроков из соображений «узости» множества равновесных ситуаций* $X^*(0)$ *и «максимальности» отвечающих им показателей интервальных неравенств* (46).

Для интервальной биматричной игры $\Gamma_2 = \langle I, J, \mathbf{A}, \mathbf{B}\rangle$ с двумя участниками, конечными множествами стратегий $I = \{1,2,...,m\}$, $J = \{1,2,...,n\}$ и выигрышами игроков в ситуациях $(i,j) \in I \times J$, заданными элементами

$$\mathbf{a}_{ij} = [a_{0,ij} - a_{\Delta,ij}, a_{0,ij} + a_{\Delta,ij}],\ \mathbf{b}_{ij} = [b_{0,ij} - b_{\Delta,ij}, b_{0,ij} + b_{\Delta,ij}]$$

интервальных $m \times n$-матриц $\mathbf{A}, \mathbf{B}$, припишем каждой ситуации (i,j) максимальное число ρ_{ij}, удовлетворяющее неравенствам

$$R(\mathbf{a}_{i_1 j} \le \mathbf{a}_{ij}) \ge \rho_{ij},\ i_1 \in I \setminus i;\ \ R(\mathbf{b}_{ij_1} \le \mathbf{b}_{ij}) \ge \rho_{ij},\ j_1 \in J \setminus j\,.$$

Наибольшее из чисел ρ_{ij} по всем $(i,j) \in I \times J$ обозначим ρ^*. Ситуацию (i^*, j^*) назовем *равновесной с показателем* ρ^*, если

$$R(\mathbf{a}_{ij^*} \le \mathbf{a}_{i^*j^*}) \ge \rho^*,\ i \in I \setminus i^*;\ \ R(\mathbf{b}_{i^*j} \le \mathbf{b}_{i^*j^*}) \ge \rho^*,\ j \in J \setminus j^*\,. \tag{48}$$

Показатель ρ^* определяет «наилучшего претендента» на равновесие в чистых стратегиях в интервальной биматричной игре. Если выбор в игре совершается однократно, концепция смешанных решений и ее вероятностная трактовка среднего выигрыша оказываются малоинформативными. Построенный показатель несет альтернативную вероятностную нагрузку. В соответствии с указанным выше свойством он тем больше, чем выше вероятность выполнения данного неравенства при произвольных реализациях значений выигрышей в своих интервалах.

Существование равновесных ситуаций с показателем ρ^* сомнений не вызывает, интерпретации равновесий зависят от значений показателя. Если $\rho^* \geq 1$, то ситуация (i^*, j^*) *устойчиво* равновесна: она удовлетворяет классическим условиям равновесия Нэша в обычной биматричной игре $\Gamma(A, B)$ при любых $A \in \mathbf{A}, B \in \mathbf{B}$. Максимальность показателя ρ^* в формуле (48) частично снимает проблему единственности равновесных ситуаций, и, по сути, является *одним из возможных способов рафинирования равновесий, в том числе в играх с детерминированными функциями выигрыша*. При $-1 < \rho^* < 1$ ситуацию (i^*, j^*) можно считать наиболее вероятной в силу отмеченной ранее связи показателя интервального неравенства и вероятности его выполнения. При $\rho^* \leq -1$ для каждой равновесной ситуации найдется другая ситуация с лучшим выигрышем хотя бы для одного игрока. В этом случае формальное определение равновесия в чистых стратегиях лишено игрового смысла и возникает необходимость перехода к новой игре в смешанных стратегиях.

Интервальную бескоалиционную игру $\mathbf{\Gamma}_2 = \langle X, Y, \mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2 \rangle$ с множествами стратегий

$$X = \{x \in R^m : e'x = 1,\ x \geq 0\},\ Y = \{y \in R^n : e'y = 1,\ y \geq 0\} \tag{49}$$

и функциями выигрышей

$$\mathbf{H}_1(x, y) = x'\mathbf{A}y = \{x'Ay : A \in \mathbf{A}\},\ \mathbf{H}_2(x, y) = x'\mathbf{B}y = \{x'By : B \in \mathbf{B}\}$$

назовем смешанным расширением игры и обозначим $\mathbf{\Gamma}\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle$. Векторы x, y из множеств (49) будем называть *смешанными* стратегиями игроков. Они имеют такую же вероятностную интерпретацию, как в обычной биматричной игре.

Лемма 2. *Если для заданного вектора* $\rho \in (-1, 0]^2$ *условия*

$$(A_0 - \rho_1 A_\Delta)y \geq v_1 e \geq (A_0 + \rho_1 A_\Delta)y, \quad y \in Y, \tag{50}$$

$$(B_0 - \rho_2 B_\Delta)'x \geq v_2 e \geq (B_0 + \rho_2 B_\Delta)'x, \quad x \in X \tag{51}$$

совместны, то любая удовлетворяющая им пара (y^*, v_1^*), (x^*, v_2^*) *порождает* ρ*-равновесную ситуацию* (x^*, y^*) *в игре* $\mathbf{\Gamma}\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle$.

Лемма 3. *Если* $\rho \in (-1, 0]^2$, *то для совместности условий* (50) *и* (51) *достаточно, чтобы системы линейных уравнений*

$$A_0 y - v_1 e = 0,\ e'y = 1;\ \ B_0' x - v_2 e = 0,\ e'x = 1 \tag{52}$$

имели решения $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Лемма 4. *Любые решения* $y^* \geq 0$, $v_1^* = x^{*\prime} A_0 y^*$ *и* $x^* \geq 0$, $v_2^* = x^{*\prime} B_0 y^*$ *систем уравнений* (52) *образуют равновесную ситуацию* (x^*, y^*) *в обычной биматричной игре* $\Gamma\langle A_0, B_0 \rangle$. *Отвечающие ситуации* (x^*, y^*) *числа* v_1^*, v_2^*

есть наиболее вероятные выигрыши игроков в интервальной биматричной игре $\mathbf{Г}\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle$.

В диссертации приведены примеры нахождения равновесий для интервальных антагонистических, матричных, биматричных и бескоалиционных игр.

Стоит особо отметить, что *метод редукции интервальных бескоалиционных игр с помощью показателя интервального неравенства применим для выявления наиболее устойчивых равновесий Нэша в детерминированных (неинтервальных) играх. Данный принцип устойчивости может быть положен в основу нового принципа рафинирования равновесий.* Действительно, если в игре существует несколько равновесий Нэша в чистых стратегиях, каждый из игроков может заботиться о наиболее стабильном из них. Тогда равновесие с максимальным значением показателя неравенства можно принять за наилучшее для всех игроков.

Исследование проблем субъективного восприятия информации в процессе принятия индивидуальных экономических решений требует сопоставительного анализа с известными позициями психофизиологии. Постулат Г.Т. Фехнера о потенциальной измеримости психических явлений стал со второй половины XIX в. фундаментом современного психологического эксперимента. Одним из самых важных оснований нового направления явилось понятие «порога восприятия». Критика данного представления нашла отражение в работах Г. Мюллера, Дж. Ястрова и др., что породило одну из главных проблем психофизики, так называемую «пороговую проблему». Речь идет о том, на каком принципе строится отражение нашими органами чувств оказываемых на них воздействий: на дискретном, когда это воздействие должно достигнуть определенной величины, чтобы вызвать ощущение, или на непрерывном, когда любое возрастание раздражителя дает соответствующее возрастание ощущения.

На основе обширной серии современных психофизиологических экспериментов и когнитивных моделей (исследования И.Ю. Мышкина, А.Н. Лебедева, К.В. Бардина, Т.П. Войтенко, В.К. Оше, И.Г. Скотниковой, М.А. Иванова и др.), в диссертации выделены феномены восприятия («*шкала различения – шкала идентификации*», «*зонная модель порога ощущения*», «*феномен простого различения*», «*асимметрия суждений о равенстве и различии*» и др.), имеющие непосредственное отношение к получению и интерпретации экономической информации, в частности, информации о ценах и количествах приобретаемых товаров и услуг. Существующий порог чувственного восприятия рецепторов не всегда играет ведущую роль в неточном получении информации; ограниченность оперативной памяти влечет значительное «огрубление» восприятия, которое, по сути, становится интервальным. В результате сформулирована *гипотеза об интервальном восприятии экономическими агентами основной доступной им информации в процессе принятия субъективных решений.* Дополнительно проанализированы практические особенности потребительского выбора по отношению к ценам и объемам потребления товаров. Выделены причины, по которым потребитель склонен воспринимать цены товаров не абсолютно, а с некоторой погрешностью.

Для подтверждения гипотезы о приближенном характере принятия оптимальных решений экономическими субъектами в рамках эмпирического исследования восприятия цен были составлены анкеты и проведены опросы потребителей. Согласно результатам опросов *большинство респондентов действительно используют приближенные, интервальные оценки при принятии решений о потреблении; включая количества приобретаемых товаров, их цены, а также величину дохода, направляемого на текущее потребление.* Таким образом, *формальное описание потребительского выбора в общем случае требует введения и анализа интервальных систем предпочтений с учетом субъективного интервального восприятия цен, доходов и объемов потребления.*

Для формирования одномерных и многомерных систем предпочтений с учетом субъективного порога восприятия у различных потребителей в диссертации предложено рассматривать интервальные предпочтения с показателем. Пространство IR замкнутых вещественных интервалов $\mathbf{x} = [x_0 - x_\Delta, x_0 + x_\Delta]$ с центрами x_0 и радиусами $x_\Delta \geq 0$ позволяет учесть неопределенность, связанную с интервальным типом восприятия. Чем больше радиус интервала, тем выше субъективная погрешность восприятия. Последнюю удобно характеризовать субъективным параметром (показателем) $\rho > 0$.

Введем на декартовом произведении $IR \times IR$ для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in IR$ бинарное отношение строгого предпочтения $\mathbf{y} \succ \mathbf{x}$ с показателем, не меньшим ρ,

$$\mathbf{y} \succ \mathbf{x} \Leftrightarrow y_0 - x_0 > \rho(x_\Delta + y_\Delta) \tag{53}$$

и отношение безразличия $\mathbf{y} \sim \mathbf{x}$:

$$\mathbf{y} \sim \mathbf{x} \Leftrightarrow -\rho(x_\Delta + y_\Delta) \leq y_0 - x_0 \leq \rho(x_\Delta + y_\Delta). \tag{54}$$

Доказанные в диссертации свойства отношений (53), (54) позволяют классифицировать их на одномерном интервальном пространстве IR как интервальное упорядочение с несчетным множеством классов эквивалентности, сводимое к строгому частичному упорядочению. Существование полезности для последнего легко доказать, используя плотность по упорядочению в множестве классов эквивалентности.

Для многомерной системы интервальных предпочтений зафиксируем вектор $\rho = (\rho_1, \rho_2, ..., \rho_n) > 0$ и для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in IR^n$ примем $\mathbf{y} \succ \mathbf{x}$, если

$$y_{0,i} - x_{0,i} > \rho_i(x_{\Delta,i} + y_{\Delta,i}),\ i = 1,2,...,n, \tag{55}$$

и $\mathbf{y} \sim \mathbf{x}$, если существуют индексы j, k, для которых справедливо хотя бы одно из неравенств

$$y_{0,j} - x_{0,j} \leq \rho(x_{\Delta,j} + y_{\Delta,j}),\ -\rho(x_{\Delta,k} + y_{\Delta,k}) \leq y_{0,k} - x_{0,k}. \tag{56}$$

Нетрудно убедиться в справедливости свойств нерефлексивности, асимметричности и транзитивности отношения предпочтения (55), а также рефлексивности, симметричности и нетранзитивности отношения безразличия (56). В отличие от одномерных предпочтений (53), многомерные предпочтения (55) не являются интервальным упорядочением.

Дальнейший анализ позволяет доказать утверждение о существовании функции полезности $u(\mathbf{x}): IR^n \to R$, *монотонной по многомерному интервальному предпочтению (55) с векторным показателем.*

Полученные результаты находят непосредственное применение в экономических приложениях. Доказанное существование детерминированной полезности в условиях интервального восприятия объемов потребления и других товарных характеристик делает возможной модификацию постановки задачи оптимального потребительского выбора, что позволяет получить более точные представления о характере потребительского спроса в условиях интервальной неопределенности.

Задача оптимального потребительского выбора с интервальными ценами, сформулированная в диссертации, основана на гипотезе об интервальном восприятии. Множество цен, воспринимаемых потребителем, предполагается разбитым на непересекающиеся интервалы, что позволяет построить разбиение потребительского множества товаров с постоянным интервальным значением полезности на каждом элементе данного разбиения и ввести в рассмотрение многозначную (интервальную) функцию полезности. Отсюда при некоторых предположениях следует и интервальное представление функции спроса на товар для каждого интервала цен. Пример графического представления интервальной функции полезности для случая однотоварной экономики изображен на рис. 1. Отвечающая ей многозначная функция спроса приведена на рис. 2.

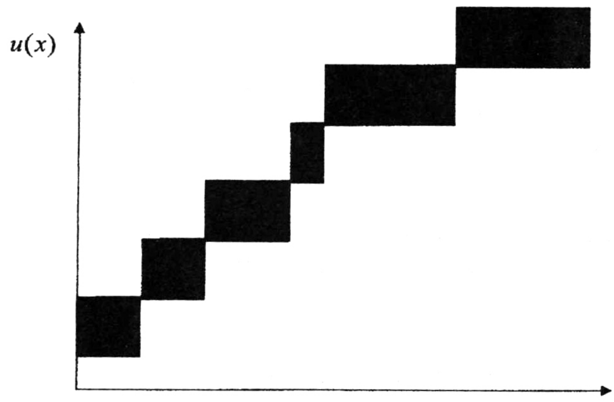

Рис. 1. Интервальная функция полезности

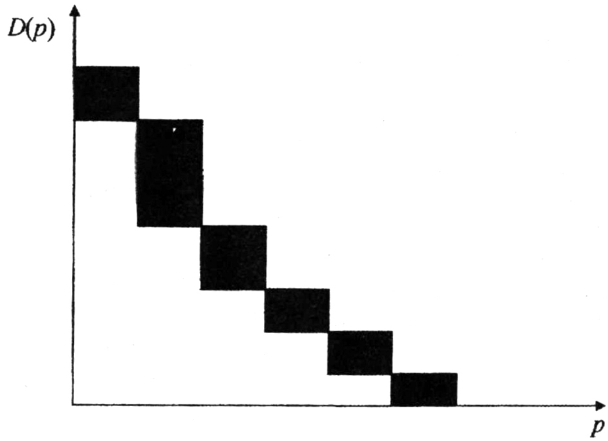

Рис. 2. Интервальная функция спроса

Отметим, что результаты предложенной модели становятся классическими, если длины соответствующих ценовых интервалов устремить к нулю. В то же время, следующая из модели многозначность функции спроса хорошо согласуется с известной моделью дисперсии цен У. Шеферда.

Дальнейшее изучение феномена интервального восприятия ценовых параметров в процессе принятия индивидуальных решений привело в работе к обобщению классической модели К. Ланкастера «товары-характеристики». Центральной гипотезой здесь является *нелинейность предпочтения* потребителей по стоимостной характеристике товаров, подтвержденной проведенными эмпирическими исследованиями. Анализ обобщенной модели позволяет получить описание выбора потребителя, когда он действует *так, как если бы цена для него не имела значения*. При этом в отличие от известного в литературе демонстративного потребления, поведение потребителя *определяется непосредственно структурой его субъективных предпочтений*. Кроме того, справедлив вывод: *с ростом доходов происходит насыщение потребителя по отдельным характеристикам, и спрос на эти характеристики становится совершенно неэластичным*, что также хорошо согласуется с эмпирическими данными и исследованиями А. Маслоу и Э. Энгеля.

В отношении принятия производственных решений в условиях интервальной неопределенности в диссертации рассмотрен сравнительный анализ различных подходов к решению задач оптимизации производственной деятельности, включая критериальные, параметрические, универсальные, субуниверсальные решения.

Максимизация выпуска предприятия в рамках производственной двухфакторной модели сведена к интервальной задаче условной оптимизации

$$\mathbf{F}(K,L) \to \max, \ \mathbf{C}(K,L) \le C, \ K \ge 0, L \ge 0, \qquad (57)$$

где в качестве ресурсов выделены капитал K и труд L, константа C определяет допустимый уровень затрат предприятия, $\mathbf{F}(K,L)$ – интервальная производственная функция, $\mathbf{C}(K,L) = \mathbf{r}K + \mathbf{w}L$ – интервальная функция затрат, $\mathbf{r}, \mathbf{w}$ – интервальные цены ресурсов.

Интервальная задача минимизации издержек предприятия при фиксированном объеме выпуска имеет «обобщенно-двойственное» представление по отношению к задаче (57):

$$\mathbf{C}(K,L) = \mathbf{r}K + \mathbf{w}L \to \min, \ \mathbf{F}(K,L) = Q, \ K \ge 0, L \ge 0. \qquad (58)$$

Проведенный в работе сравнительный анализ задач (57), (58) показывает, что в рамках параметрического подхода данные задачи определяют различные множества решений в пространстве переменных $(K,L) \in R_+^2$, однако их универсальные и субуниверсальные решения попарно совпадают. Последние позволяют однозначно определить интервальную функцию совокупных издержек долгосрочного периода $\mathbf{C}(Q)$, на основе которой строится интервальная функция средних издержек $\mathbf{AC}(Q)$ и вычисляется эффективный масштаб деятельности предприятия как ее аргминимум. Решение последней оптимизационной задачи, в свою очередь, сводится к применению концепции универсальных решений на основе задачи вида (18).

Проблемы оптимизации транспортных расходов в условиях неопределенности в диссертации предложено рассматривать на основе транспортной задачи

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min, \ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \mathbf{p}_i, \ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \mathbf{q}_j, \ x_{ij} \ge 0, \ i = 1,\dots,m, j = 1,\dots,n \quad (59)$$

с интервальными запасами $\mathbf{p}_i = [p_{0,i} - p_{\Delta,i}, p_{0,i} + p_{\Delta,i}]$ и потребностями $\mathbf{q}_j = [q_{0,j} - q_{\Delta,j}, q_{0,j} + q_{\Delta,j}]$. Решение задачи (59) здесь интерпретируется как предварительный прогноз оптимальных объемов перевозок $x_{ij} \ge 0$ и их суммарной стоимости.

Основной вопрос в определении решения задачи (59) заключается в способе балансировки суммарных запасов и потребностей, выраженных интервалами $\mathbf{S}_p = [S_{p0} - S_{p\Delta}, S_{p0} + S_{p\Delta}]$, $\mathbf{S}_q = [S_{q0} - S_{q\Delta}, S_{q0} + S_{q\Delta}]$, где $S_{p0} = \sum_{i=1}^{m} p_{0,i}$, $S_{p\Delta} = \sum_{i=1}^{m} p_{\Delta,i}$, $S_{q0} = \sum_{j=1}^{n} q_{0,j}$, $S_{q\Delta} = \sum_{j=1}^{n} q_{\Delta,j}$.

В качестве критерия сбалансированности в работе предложен минимальный дисбаланс между интервальными запасами и потребностями. Данному условию удовлетворяют определения универсального решения и показателя интервального неравенства. В работе показано, что при $S_{p0} = S_{q0}$ универсальное решение интервальной транспортной задачи сводится к ее центральному аналогу. В противном случае оно позволяет определить оптимальные перевозки с учетом неполного удовлетворения интервальных потребностей или избыточных интервальных запасов товара.

Применение показателя интервального неравенства позволяет оценить величину несбалансированности интервальных запасов $\mathbf{S}_p$ и потребностей $\mathbf{S}_q$. Доказано, что сбалансированность центральной задачи $S_{p0} = S_{q0}$ достигается при максимальном значении показателя неравенства, равном нулю. Если же центральная задача несбалансирована $\left(S_{p0} \neq S_{q0}\right)$, наилучший с точки зрения показателя баланс достигается при $\rho = -\dfrac{\left|S_{p0} - S_{q0}\right|}{S_{p\Delta} + S_{q\Delta}}$.

Отдельное внимание в работе уделено модели игрового соперничества на рынках олигополии, где наибольшее значение приобретает неопределенность стратегического типа, связанная с поведением соперников и выбором ими стратегий.

Наиболее общей известной постановкой является модель предполагаемых вариаций, объединяющая известные классические модели Курно, Штакельберга, Бертрана. Однако основным открытым вопросом данной модели является выбор каждым из соперников конкретной функции предполагаемой реакции на действия остальных агентов. По смыслу модели определяющим параметром является значение производной функции предполагаемой реакции, лежащее в отрезке [-1,0] и зависящее от субъективного выбора каждого из соперников.

В диссертации предложена интервальная модель предполагаемых вариаций, в которой каждый из соперников может выбрать произвольное, заранее неопределенное, значение производной функции предполагаемой реакции *в интервале* [-1,0]. На примере дуополии с линейной функцией спроса найдено соответствующее равновесие, в котором каждый из двух соперников занимает (в симметричных условиях) 40% потенциальной емкости рынка, что выше, чем в классических моделях Курно и Штакельберга и более точно описывает современные рыночные тенденции. *Полученное равновесие одновременно отвечает концепции универсальных решений и равновесию в соответствующей интервальной бескоалиционной игре двух агентов с максимально возможным показателем, равным нулю.*

Проблемы наблюдения, управления и прогнозирования макроэкономических систем в условиях высокой неопределенности нашли отражения в диссертационной работе в рамках интервальных моделей краткосрочной макроэкономической стабилизации, идентификации долгосрочных макроэкономических параметров, а также модели межрегионального производственного баланса. Модели стабилизации и идентификации предложено формировать в два этапа, на первом из которых строится эконометрическая модель взаимосвязи основных параметров, а их оценки на втором этапе используются для построения интервальных динамических моделей.

Теоретические аспекты моделирования динамических инфляционных процессов, рассмотренные в работах Р. Лукаса, Дж. Ротемберга, Дж. Робертса, Дж. Кальво, Дж. Тейлора, Б. МакКаллума, Б. Чадха, П. Мэссона, Дж. Мередита, А. Эстреллы, Дж. Фёрера, Дж. Гали, М. Гертлера, Дж. Д. Лопеза-Салидо, Л. Зондергарда и др., позволяют сформировать динамическую авторегрессионную модель

$$\begin{cases} y_t = \beta_{12} p_t + \beta_{13} m_t + \alpha_{11} y_{t-1} + \alpha_{12} p_{t-1} + \alpha_{13} m_{t-1} + \varepsilon_{(y)t}, \\ p_t = \beta_{21} y_t + \beta_{23} m_t + \alpha_{21} y_{t-1} + \alpha_{22} p_{t-1} + \alpha_{23} m_{t-1} + \varepsilon_{(p)t}, \\ m_t = \beta_{31} y_t + \beta_{32} p_t + \alpha_{31} y_{t-1} + \alpha_{32} p_{t-1} + \alpha_{33} m_{t-1} + \varepsilon_{(m)t}, \end{cases} \tag{60}$$

связывающую основные макроэкономические переменные: темп прироста валового внутреннего продукта y_t, темп прироста инфляции p_t, темп прироста денежной массы m_t, а также случайные шоки $\varepsilon_{(\cdot)t}$.

Преобразование модели к структурному виду и нахождение эконометрических оценок коэффициентов позволяют представить модель в прогнозном виде

$$\begin{cases} y_t = \tilde{a}_{11} y_{t-1} + \tilde{a}_{12} p_{t-1} + \tilde{b}_1 m_{t-1}, \\ p_t = \tilde{a}_{21} y_{t-1} + \tilde{a}_{22} p_{t-1} + \tilde{b}_2 m_{t-1}, \\ m_t = \tilde{a}_{31} y_{t-1} + \tilde{a}_{32} p_{t-1} + \tilde{b}_3 m_{t-1}. \end{cases} \tag{61}$$

Введем дискретную многошаговую управляемую систему с фазовыми переменными y_t, p_t и скалярным управлением m_t. Отбрасывая в (61) третье уравнение, отвечающее политике Центрального банка *предыдущих периодов*, формируя фазовый вектор $x^t = (y_t, p_t)'$ и управление $u^t = m_t$, приходим к интервальной управляемой системе

$$x^{t+1} = \mathbf{A} x^t + \mathbf{b} u^t, \quad t=0,1,\ldots, T-1, \tag{62}$$

с горизонтом планирования T.

Центры A_0, b_0 интервальной матрицы состояния **A** и интервального вектора **b** отвечают полученным оценкам коэффициентов первых двух уравнений эконометрической системы (61), радиусы A_Δ, b_Δ определяются заданной относительной погрешностью.

Стабилизирующее макроэкономическую систему управление отвечает противоречивым целевым показателям (увеличению скорости прироста ВВП одновременно с уменьшением скорости роста инфляции) и находится как дискретный аналог субуниверсального управления (26). Предложена модификация модели с ежеквартальными наблюдениями и полугодовыми интервалами управления.

В качестве примера рассмотрено применение на реальных данных Росстата за период с первого квартала 1999 года по четвертый квартал 2005 года включительно. Приведенная форма модели оценена трехшаговым методом наименьших квадратов, сформированы «центральные» матрицы интервальной управляемой системы (62):

$$A_0 = \begin{pmatrix} -0.32 & -2.25 \\ 0.11 & 0.09 \end{pmatrix}, \quad b_0 = \begin{pmatrix} 0.82 \\ -0.07 \end{pmatrix}.$$

Матрицы радиусов заданы относительной погрешность измерения в размере пяти процентов. Приняты целевые показатели: увеличить прирост выпуска на 10% и уменьшить темп инфляции на 40% от исходных значений.

Результаты построения субуниверсального управления для T = 2, 3, 4, 5, 6 квартальных периодов приведены в таблице 1.

Таблица 1

Результаты вычислений

Количество периодов стабилизации	Вектор управления					
	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
2	0.24	0.06	-	-	-	-
3	-0.04	0.15	0.04	-	-	-
4	-0.03	-0.05	0.13	0.05	-	-
5	0.02	-0.02	-0.05	0.17	0.05	-
6	0	0.01	0.02	-0.03	0.12	0.04

Аналогичные вычисления для модели с четырьмя полугодовыми периодами приводят к следующему результату: при неизменных требованиях на прирост выпуска и уменьшение инфляции изменения денежной массы должны составить: u_1=-0,04; u_2=0,16; u_3=-0,41; u_4=-0,01.

Предложенная схема *построения динамического управления денежной массой позволяет гарантировать с достаточно высокой точностью достижение желаемых показателей выпуска и инфляции в конечный период времени, что может быть использовано в практическом построении динамической монетарной политики Центрального банка.*

Для решения проблемы идентификации параметров макроэкономической системы в условиях высокой неопределенности рассмотрена дискретная интервальная модель динамики взаимосвязи основных макроэкономических показателей в долгосрочном периоде в виде системы

$$\begin{cases} y_{t+1} - y_t = a_{11}y_t + a_{12}k_t + a_{13}l_t, \\ k_{t+1} - k_t = a_{21}y_t + a_{22}k_t, \\ l_{t+1} - l_t = a_{33}l_t. \end{cases} \tag{63}$$

Здесь k_t – прирост капитала, l_t – прирост уровня занятости, y_t – прирост уровня валового выпуска в экономике в период t.

Первое уравнение системы соответствует производственной функции Кобба-Дугласа в логарифмических приростах с нейтральным научно-техническим прогрессом. Второе уравнение системы описывает эффекты акселерации и амортизации капитала. Третье уравнение системы отражает динамику трудовых ресурсов.

В силу неточности оценок эконометрической модели (63) прогнозные значения коэффициентов полагаются интервальными с заданной относительной погрешностью δ_A оценок коэффициентов.

Введем вектор состояния $x^t = (y_t, k_t, l_t)'$ в моменты времени t=0,1, …,T и вектор параметров $w = (w_1, w_2, w_3)'$, определяющий индивидуальные характеристики страны по сравнению со «средней динамикой», характерной для всех стран. Компонента w_1 отражает специфику научно-технического прогресса; компонента w_2 связана с условиями создания и эксплуатации капитала и отражает влияние природных и климатических условий; компонента w_3 характеризует трудовой фактор или, в более общей интерпретации, «менталитет» населения и общие демографические тенденции. Если идентифицировать перечисленные параметры модели – компоненты вектора w, – то для экономики отдельно взятой страны можно выделить вклад экзогенных по отношению к макроэкономической системе факторов в общую динамику экономических показателей, выраженных фазовыми векторами x^t, t=0,1,…,T.

Предполагая аддитивное влияние указанных параметров, построим интервальную систему

$$x^{t+1} = Ax^t + w,\ A \in \mathbf{A}. \tag{64}$$

В силу погрешностей статистического учета предположим, что значения вектора $x^t = (y_t, k_t, l_t)'$ не известны, однако доступен вектор z^t наблюдений, отвечающий интервальной системе

$$z^t = Cx^t,\ t = 0,1,...,T,\ C \in \mathbf{C}. \tag{65}$$

В простейшем случае интервальная матрица наблюдения выбирается специальным образом: $\mathbf{C} = [1-\delta_C, 1+\delta_C]I$, где δ_C – относительная погрешность статистической обработки данных – компонент вектора x^t; I – единичная матрица.

Таким образом, формулы (64), (65) совместно с интервальными матрицами состояния и наблюдения $\mathbf{A} = [1-\delta_A, 1+\delta_A]A_0$, $\mathbf{C} = [1-\delta_C, 1+\delta_C]I$ определяют интервальную дискретную систему с наблюдением фазового состояния. Задача заключается в нахождении оценки вектора w при известных наблюдениях.

На основе предложенных методов интервальной идентификации построены универсальное и субуниверсальное решения, компоненты которых одновременно определяют оценки начального состояния и вектора параметров интервальной системы (64), (65).

В диссертации рассмотрен пример идентификации долгосрочных макроэкономических параметров пяти развитых экономик, включая Австралию, Великобританию, США, Японию и объединенную Европу на основе данных Всемирного банка и Международного валютного фонда. Результаты оценивания параметров приведены в табл. 2.

Таблица 2

Результаты идентификации

	Австралия	Великобритания	США	Япония	Объединенная Европа
Вектор параметров	-0,022 -0,008 0,010	0,038 0,009 0,005	0,095 0,095 -0,044	0,120 0,027 0,020	-0,064 -0,039 0,029

Согласно результатам расчетов, аддитивный коэффициент нейтрального технического прогресса по полученным расчетам принимает максимальное значение 0,12 для экономики Японии (относительный вклад прогресса в рост ВВП в размере 12% в год) и минимальное значение для единой европейской экономики. Напротив, экономика объединенной Европы имеет максимальное положительное влияние трудового фактора (порядка 3% в год) в отличие от экономики США, где сравнительное падение влияния трудового фактора оценивается в 4% в год.

Для оценки потенциала торгового взаимодействия регионов России в диссертации предложена интервальная энтропийная модель межрегионального производственного баланса.

Отталкиваясь от многорегиональной многоотраслевой модели Леонтьева-Страута и энтропийной коммуникационной модели Вильсона, рассмотрим модель замкнутой экономики, состоящей из k регионов, в которой имеется n отраслей. Каждая отрасль действует во всех регионах и производит один вид товара, разные отрасли производят разные товары. Пусть x_{ij}^r - количество продукта r-го типа, $r=1,...,n$, поставляемого из i-го региона в j-й, $i,j=1,...,k$, c_{ij}^r - затраты, связанные с поставкой единицы продукта r из региона i в регион j, y_j^r - конечное потребление продукта r в регионе j. Балансовые соотношения

$$\sum_i x_{ij}^r = \sum_p a_j^{rp} \sum_k x_{jk}^p + y_j^r, \qquad (66)$$

справедливые для каждого региона $i=1,...,k$ и продукта $r=1,...,n$, характеризуют межрегиональные потоки продукции и их распределение на конечное и внутрипроизводственное потребление.

Дополним балансы (66) ограничением

$$S^r = \sum_i \sum_j c_{ij}^r x_{ij}^r \tag{67}$$

на суммарную стоимость производства и перемещения товаров. Предполагая, что каждый экономический агент формирует потоки производимых и потребляемых им продуктов независимо от других и с равной вероятностью, нетрудно показать, что наиболее вероятное (статистически равновесное) состояние межрегиональной системы отвечает энтропийному функционалу вида

$$H = -\sum_i \sum_j \sum_r x_{ij}^r \ln x_{ij}^r . \tag{68}$$

Совмещение целевого условия максимизации энтропии (68) и ограничений (66), (67) приводит к задаче нелинейного программирования

$$-\sum_i \sum_j \sum_r x_{ij}^r \ln x_{ij}^r \to \max ,$$

$$\sum_i x_{ij}^r = \sum_p a_j^{rp} \sum_k x_{jk}^p + y_j^r ,\ i = 1,\dots,k ,\ r = 1,\dots,n, \tag{69}$$

$$S^r = \sum_i \sum_j c_{ij}^r x_{ij}^r ,\ x_{ij}^r \geq 0, i, j = 1,\dots,k, r = 1,\dots,n$$

относительно переменных $x_{ij}^r,\ i, j = 1,\dots,k, r = 1,\dots,n,$ отражающих межрегиональные перетоки продукции.

Пусть теперь технологические коэффициенты a_j^{rp} и удельные затраты на поставку продукции c_{ij}^r заданы интервально в силу различных факторов неопределенности и проблем идентификации реальных данных:

$$a_j^{rp} \in [a_{0,j}^{rp} - a_{\Delta j}^{rp}, a_{0,j}^{rp} + a_{\Delta,j}^{rp}],\ c_{ij}^r \in [c_{0,ij}^r - c_{\Delta,ij}^r, c_{0,ij}^r + c_{\Delta,ij}^r] \tag{70}$$

с известными значениями центров $a_{0,j}^{rp}, c_{0,ij}^r$ и радиусов $a_{\Delta,j}^{rp}, c_{\Delta,ij}^r$ соответствующих интервалов, $i, j = 1,\dots,k, r, p = 1,\dots,n$.

Применение концепции универсальных решений позволяет найти решений интервальной задачи (69), (70). *В работе подробно исследованы и описаны свойства данных решений, получены результаты моделирования на реальных данных для экономики Дальнего Востока России.* Модель, агрегированная до 6 базовых отраслей, позволила выявить общие тенденции межрегионального экономического взаимодействия и уровень экономической связанности регионов Дальнего Востока России (см. рис. 3). Приведены выводы по отраслевому и межотраслевому анализу взаимодействия регионов ДВ России в рамках рассматриваемой модели.

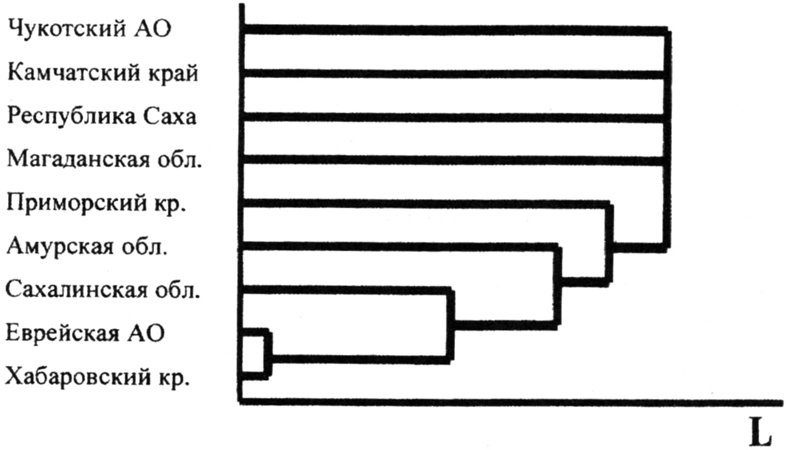

Рис. 3. Кластеризация регионов Дальнего Востока России по уровню экономической связанности

В диссертации предложены подходы к принятию инвестиционных решений в условиях интервальной неопределенности с учетом проблемы немонотонности функции потоков платежей в зависимости от величины процентной ставки, в том числе введены линейная и интегральная меры риска инвестиционных решений, а также рассмотрена модель оптимизации портфеля активов с интервально определенными доходностями. Предложены методы нахождения оптимальных и субоптимальных портфелей интервальных активов, проведены численные эксперименты, выявлены качественные эвристики, позволяющие при необходимости сокращать размерность задачи.

Пусть инвестиционная компания обладает фиксированным капиталом, планируемым к размещению в активы $i \in I = \{1,2,...,n\}$. Доходность u_i актива i лежит в замкнутом интервале

$$a_i \le u_i \le b_i, \; i \in I \tag{71}$$

с известными концами a_i, b_i. Примем за s_i долю капитала, вкладываемую в приобретение i-го актива, тогда

$$\sum_{i=1}^{n} s_i = 1, \; s_i \ge 0, i \in I. \tag{72}$$

Неотрицательность s_i означает отсутствие «коротких продаж», то есть приобретение активов в долг сверх имеющегося капитала. Вектор $s = (s_1,...,s_n)'$, удовлетворяющий условиям (72), назовем портфелем активов.

Требуемая доходность w портфеля активов s будет обеспечена, если

$$\sum_{i=1}^{n} s_i u_i \geq w. \quad (73)$$

Пусть $u = (u_1,...,u_n)'$ – вектор неопределенных доходностей портфеля, $a = (a_1,...,a_n)'$, $b = (b_1,...,b_n)'$ – векторы нижних и верхних границ доходностей, $c = 0.5(a+b)$ – вектор «средних» доходностей, $e = (1,...,1)'$ – вектор с единичными координатами. Условия (71)-(73) формируют соответственно n-мерный параллелепипед $U = \{u : a \leq u \leq b\}$, $(n\text{-}1)$-мерный симплекс $S = \{s : e's = 1, s \geq 0\}$ и полупространство $\Pi(s,w) = \{u \in R^n : s'u \geq w\}$. Множество $U(s,w) = U \cap \Pi(s,w)$ – общая часть параллелепипеда U и полупространства $\Pi(s,w)$ – определяет *безопасные реализации доходностей* для $s \in S, w \in [0,+\infty)$.

Введем функцию $R(s,w) = 1 - \dfrac{\mu(U(s,w))}{\mu(U)}$, где символ $\mu(A)$ означает лебегову меру (объем) множества $A \subset R^n$. Величину $R(s,w)$ будем интерпретировать как риск неполучения требуемой доходности w портфеля активов s.

Задача состоит в минимизации функции риска $R(s,w)$ по $s \in S$ и нахождении оптимального портфеля $s^*(w) = \arg\min_{s \in S} R(s,w)$, а также построения функции оптимального риска $R^*(w) = R(s^*(w),w)$ при всех значениях требуемой доходности $w \in [0,+\infty)$.

В работе сформулированы и доказаны свойства функции риска $R(s,w)$, функции оптимального риска $R^*(w)$, в том числе непрерывность $R(s,w)$, непрерывность и монотонность $R^*(w)$; найдены точные (аналитические) значения функции оптимального риска для некоторых интервалов доходности w и соответствующие им оптимальные портфели.

В общем случае функция оптимального риска достаточно сложна для представления в явном виде, поэтому предложены различные способы приближенного вычисления оценок функции оптимального риска $R^*(w)$. Для сравнительно небольшого числа активов n нетрудно составить переборный алгоритм, позволяющий построить функцию $R^*(w)$ «эмпирически», вычисляя для каждого $w \in W$ значения $R(s,w)$ на некоторой сетке симплекса S. Малость ошибки при дроблении сетки гарантируется непрерывностью функции $R(s,w)$.

Вычисление оценки функции $R^*(w)$ и определение долей распределения капитала для каждого $w \in W$ можно осуществить и с использованием метода Монте-Карло, предполагая равномерное распределение доходностей на интервалах (71). Данный метод оказывается наиболее предпочтительным при небольшом числе активов и при достаточных вычислительных ресурсах позволяет рассчитать оптимальный портфель вложений с наперед заданной точностью. Однако при большом числе альтернатив инвестирования требования к вычислительным ресурсам оказываются чрезмерными.

Метод Монте-Карло демонстрирует диверсификацию, то есть распределение капитала между различными активами, при малых значениях доходности портфеля. При высоких значениях доходностей капитал рекомендуется вкладывать в одну-две ценные бумаги, верхние границы интервалов доходностей которых имеют относительно высокие значения.

С другой стороны, можно использовать метод внутренней неулучшаемой аппроксимации множества $U(s,w)$ некоторым множеством с легко вычислимой мерой. Л.Т. Ащепковым, Ю.Б. Стегостенко предложен метод вписывания n-мерных параллелепипедов в область $U(s,w)$ и показано, что нахождение решения можно свести к задаче линейного программирования, которую предложено искать симплекс-методом. В диссертации построено и обосновано аналитическое решение указанной задачи, согласно которому весь капитал в оптимуме вкладывается в актив с максимальной верхней границей доходности.

В результате предложено использовать нелинейную внутреннюю аппроксимацию методом вписывания n-мерных эллипсоидов. При подробном рассмотрении данного метода выявляется невыпуклость структуры ограничений соответствующей оптимизационной задачи, что фактически приводит к нахождению локального, а не глобального оптимума в допустимой области при использовании численных процедур оценивания. *Таким образом, данный подход можно рассматривать только как нахождение верхней оценки риска, а получаемый в результате портфель активов – как субоптимальный.*

Указанные подходы могут быть дополнены некоторыми эвристическими критериями, сформулированными на основе свойств функции риска и проведенных численных экспериментов.

В частности, i-й актив не включается в оптимальные и субоптимальные портфели, если $w \ge c_i = 0.5(a_i + b_i)$, поэтому одним из упрощений при построении верхней оценки риска является сокращение размерности задачи искусственными ограничениями $\hat{s}_i = 0$ по мере достижения требуемой доходностью w значений c_i.

Технически сложные процедуры вычисления многомерных объемов для построения функции оптимального риска $R^*(w)$ или ее верхних оценок можно заменить на более простой, хотя и более грубый, линейный критерий. В качестве такого критерия может служить расстояние от одной или нескольких точек параллелепипеда U до гиперплоскости $\partial\Pi(s,w) = \{u : s'u = w\}$.

Например, для функции $d_m(s,w) = \dfrac{(s'x - w)}{\sqrt{s's}}$ «расстояния» (с учетом знака) от гиперплоскости $\partial\Pi(s,w)$ до точки m с координатами $m_i = \mu_a a_i + \mu_b b_i$, $\mu_a, \mu_b \ge 0, \mu_a + \mu_b = 1$, $i \in I$ решение задачи

$$d_m(s,w) = \frac{s'm - w}{\sqrt{s's}} \to \max_s, \ \sum_{i=1}^{n} s_i = 1, \ s_i \ge 0$$

позволяет построить субоптимальный портфель $\tilde{s}$ по правилам:

1) если $m_i - w \le 0 (\forall i \in I)$, то $\tilde{s}_k = 1, \tilde{s}_j = 0, j \ne k$, где $k = \arg\max_{i \in I}(m_i - w)$;

2) иначе компоненты $\tilde{s}_i$ субоптимального портфеля пропорциональны тем активам, для которых $m_i - w > 0$:

$$\tilde{s}_i = \max\left\{0, \frac{m_i - w}{\sum_{j=1}^{n} \max\{0, m_i - w\}}\right\}.$$

Кроме того, для каждого $w \in W$ существует набор допустимых весов μ_a, μ_b, для которых в оптимуме все $\tilde{s}_i = \dfrac{m_i - w}{\sum_{j=1}^{n}(m_j - w)} > 0$.

В заключении кратко обсуждаются основные теоретические выводы и различные аспекты практического применения предложенных экономико-математических методов и моделей принятия решений в условиях высокой (интервальной) неопределенности.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ

Монография

1. Ащепков Л.Т., Давыдов Д.В. Универсальные решения интервальных задач оптимизации и управления. – М.: Наука, 2006. –151 с. (Соавтор Ащепков Л.Т.; личн. вклад 4,8 п. л.)

Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК РФ

2. Давыдов Д.В. Интервальное восприятие информации и экономическое поведение потребителя: методологические аспекты // Вопросы экономики. – 2007. – № 12. – С. 60-70. – 0,45 п. л.

3. Давыдов Д.В. Методология принятия экономических решений с позиций субъективной неопределенности // Вестник Российской экономической академии им. Г.В. Плеханова. – 2009. – № 2(26). – С. 111-120. – 0,6 п. л.

4. Давыдов Д.В. «Портфельное» инвестирование в ресурсной экономике. Интервальный подход // Экономика природопользования. – 2009. – № 1. – С. 69-79. – 0,5 п. л.

5. Давыдов Д.В. Идентификация параметров линейных интервальных управляемых систем с интервальным наблюдением // Известия РАН. Теория и системы управления. –2008. – № 6. – С. 25-29. – 0,2 п. л.

6. Давыдов Д.В. Локальная стабилизация интервально наблюдаемой системы с неопределенными параметрами // Вычислительные технологии. – 2003. – Т. 8. – № 1. – С.44-51. – 0,3 п. л.

7. Давыдов Д.В. Интервальная идентификация макроэкономических параметров // Информатика и системы управления. – 2009. – № 2 (20). – С. 78-86. – 0,5 п. л.

8. Давыдов Д.В. Редукции интервальных некооперативных игр // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2006. – Т. 46. – № 11. – С. 2001-2008. (Соавтор Ащепков Л.Т.; личн. вклад 0,2 п. л.)

9. Давыдов Д.В. Показатель интервального неравенства: свойства и применение // Вычислительные технологии. – 2006. – Том 11. – № 4. – С. 13-22. (Соавтор Ащепков Л.Т.; личн. вклад 0,3 п. л.)

10. Давыдов Д.В. Существование функций полезности при интервальных предпочтениях с показателем // Информатика и системы управления. – 2008. – № 1 (15). – С. 113-120. (Соавтор Тарасов А.А.; личн. вклад 0,2 п. л.)

11. Давыдов Д.В. Интервальный подход к задаче монетарной стабилизации // Информатика и системы управления. – 2007. – № 1 (13). – С. 78-86. (Соавтор Макаренко Г.С.; личн. вклад 0,3 п. л.)

12. Давыдов Д.В. Стабилизация наблюдаемой линейной системы управления с постоянными интервальными коэффициентами // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2002. – № 2 (477). – С. 11-17. (Соавтор Ащепков Л.Т.; личн. вклад 0,2 п. л.)

Прочие публикации

13. Давыдов Д.В. Интервальное представление цен и оптимальный выбор потребителя // Информатика и системы управления. – 2004. – № 2 (8). – С. 80-89. (Соавтор Тарасов А.А.; личн. вклад 0,3 п. л.)

14. Давыдов Д.В. Модели поведения потребителей: экспериментальная проверка в региональных условиях // Информатика и системы управления. – 2003. – № 2 (6). – С. 57-66. (Соавтор Тарасов А.А.; личн. вклад 0,3 п. л.)

15. Давыдов Д.В. Стабилизация управляемых систем с интервальными параметрами : Диссертация ... канд. физ.-мат. наук. – Владивосток, 2003. – 123 с. – 5,1 п. л.

16. Давыдов Д.В. Инфляционная динамика в краткосрочном периоде: проблемы оценивания и прогнозирования / Экономический анализ на Дальнем Востоке России. Научные доклады. – М.: МОНФ, 2005. – Вып. 169. – С. 86-98. – 0,6 п. л.

17. Давыдов Д.В. Интервальная задача максимизации прибыли / Экономический анализ на Дальнем Востоке России: исследования молодых экономистов-математиков. Научные доклады. – М.: МОНФ, 2006. – Вып. 185. – С. 121-137. (Соавтор Джигимон А.В. ; личн. вклад 0,4 п. л.)

18. Давыдов Д.В. К задаче оптимального выбора в условиях интервально определенных цен / Экономический анализ на Дальнем Востоке России: Научные доклады. – М.: МОНФ, 2005. – Вып. 169. – С. 99-108. (Соавтор Тарасов А.А. ; личн. вклад 0,2 п. л.)

19. Давыдов Д.В. Формирование бюджетов в условиях интервальной неопределенности / Современный экономический анализ на Дальнем Востоке России: позиция молодых исследователей. Научные доклады. – М.: МОНФ, 2007. – Вып. 193. – С. 221-232. (Соавтор Ланге В.А.; личн. вклад 0,3 п. л.)

20. Давыдов Д.В. Модели теории выбора : Препринт. – Владивосток: Издательство Дальневосточного университета, 2005. – 58 с. (Соавтор Тарасов А.А. ; личн. вклад 1,5 п. л.)

21. Давыдов Д.В. Моделирование экономического пространства и стратегическое развитие территорий / Стратегическое планирование на Дальнем Востоке России. Научные доклады. – М.: МОНФ. 2006. – Вып. 171. – С. 75-103 (Соавторы Абрамов А.Л., Величко А.С., Достовалов В.Н.; личный вклад 0,4 п. л.)

22. Давыдов Д.В. Подходы к измерению риска в условиях высокой неопределенности / XXXI международная научная школа-семинар им. акад. С. С. Шаталина. Труды школы-семинара. Часть III. – Воронеж. Изд-во ВГУ, 2008. – С. 241-244. (Соавтор Джигимон А.В.; личн. вклад 0,1 п. л.)

23. Давыдов Д.В. Интервальная модель оценки инвестиционных проектов / XXX международная научная школа-семинар им. акад. С. С. Шаталина. Труды школы-семинара. Часть II. – Воронеж: Изд-во ВГУ, 2007. – С. 296 – 298. – 0,15 п. л.

24. Давыдов Д.В. Интервальные модели производственной оптимизации / XXIX международная научная школа-семинар им. акад. С. С. Шаталина. Труды школы-семинара. Часть II. – Воронеж: Изд-во ВГУ, 2007. – С. 72-76. (Соавторы Джигимон А.В., Чередниченко Н.А.; личн. вклад 0,2 п. л.)

25. Давыдов Д.В. Потребительский выбор в условиях неопределенности: некоторые эксперименты. // XXVIII международная научная школа-семинар им. С. С. Шаталина. Тезисы докладов. – Воронеж: Изд-во ВГУ, 2005. – С. 170-172 (Соавтор Тарасов А.А.; личн. вклад 0,1 п. л.)

26. Давыдов Д.В. Оптимизация и равновесия в интервальных моделях конкуренции / Труды XIV Байкальской международной школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения». Том 5. «Равновесные модели экономики и энергетики». – Иркутск-Северобайкальск, 2008. – С. 372-379. – 0,3 п. л.

27. Давыдов Д.В. Стабилизация линейной стационарной системы управления с интервальными коэффициентами // Дальневосточный математический сборник. – 1999. – № 8. – С. 32-38. (Соавтор Ащепков Л.Т. ; личн. вклад 0,2 п. л.)

28. Давыдов Д.В. Формирование оптимального портфеля ценных бумаг в условиях неопределенной доходности // Дальневосточный математический сборник. – 1998. – № 6. – С. 143-148. – 0, 25 п. л.

29. Давыдов Д.В. Локальная стабилизация интервально наблюдаемой системы с неопределенными параметрами / Конференция молодых ученых по математике, математическому моделированию и информатике. Тез. докладов. – Новосибирск, 2001. – С. 24. – 0,05 п. л.

30. Давыдов Д.В. Неклассический подход к теории потребительского выбора: цена как одна из характеристик товара / Международная конференция «Социально-экономическое развитие Дальнего Востока». Тезисы докладов. – Владивосток: Изд-во Дальневосточного университета, 2005. – С. 86. – 0,05 п. л.

31. Давыдов Д.В. Некоторые подходы к решению интервальной транспортной задачи / III Всероссийская конференция «Проблемы оптимизации и экономические приложения». Тезисы докладов. – Омск, 2006. – С. 86. – 0,05 п. л.

32. Давыдов Д.В. Необходимые условия экстремума итервальнозначных функций / Всероссийская конференция «Математическое программирование и приложения». Тезисы докладов. – Екатеринбург: УрО РАН, 2007. – С. 106. – 0,05 п.л.

33. Давыдов Д.В. Неопределенность и информация в принятии экономических решений / Труды 4-й международной научной конференции творческой молодежи. – Хабаровск: Изд-во ДВГУПС, 2005. – Т.3. – С. 111-114. – 0,2 п.л.

34. Давыдов Д.В. Измерение и оптимизация рисков в условиях интервальной неопределенности / XXXIII Дальневосточная математическая

школа-семинар им. акад. Е.В. Золотова. Тезисы докладов. – Владивосток, 2008. – С. 155. (Соавтор Джигимон А.В.; личн. вклад 0,1 п. л.)

35. Давыдов Д.В. Идентификация параметров дискретной интервальной динамической системы с интервальным наблюдением / XXXII Дальневосточная математическая школа-семинар им. акад. Е.В. Золотова. Тезисы докладов. – Владивосток, 2007. – С. 116-117. – 0,1 п. л.

36. Давыдов Д.В. Оптимальное инвестирование в условиях интервальной неопределенности / XXXI Дальневосточная математическая школа-семинар им. акад. Е.В. Золотова. Тезисы докладов. – Владивосток, 2006. – С. 114. (Соавтор Лазукина А.А.; личн. вклад 0,1 п. л.)

37. Давыдов Д.В. Оценка вероятности совместности системы линейных интервальных неравенств / XXX Дальневосточная математическая школа-семинар им. акад. Е.В. Золотова. Тезисы докладов. – Хабаровск, 2005. – С. 132-133. – 0,1 п. л.

38. Давыдов Д.В. Асимптотическая стабилизация линейной наблюдаемой автономной управляемой системы с интервальными коэффициентами / XXV Дальневосточная математическая школа-семинар им. акад. Е.В. Золотова. Тезисы докладов. – Владивосток, 2000. – С. 36-37. – 0,1 п. л.

39. Некоторые подходы к оптимизации экономических рисков в условиях высокой неопределенности / IV Всероссийская конференция «Проблемы оптимизации и экономические приложения» : Материалы конференции. – Омск, 2009. – С. 199 (Соавтор Джигимон А.В.; личн. вклад 0,1 п. л.)

40. Давыдов Д.В. Моделирование влияния крупных федеральных инициатив на экономику Дальнего Востока на примере вступления России в ВТО / Стратегии развития регионов Дальнего Востока России. Научные доклады. – М.: МОНФ, 2005. – Вып. 159. – С. 71-95. (Соавторы Абрамов А.Л., Величко А.С., Достовалов В.Н.; личный вклад 0,4 п. л.)

41. Davydov D.V. Stabilization of linear stationary control system with interval coefficients [Электронный ресурс] / Proceedings of The Third Asian Control Conference. – Shanghai, China, 2000. – 1 электрон. опт. диск CD-ROM (соавтор Ащепков Л.Т.; личн. вклад 0,1 п. л.)

42. Davydov D.V. Identification of parameters of linear interval controllable systems with interval observation // Journal of computer and systems sciences international. – 2008. – Vol. 47. – № 6. – Pp. 861–865. – 0,2 п. л.

43. Davydov D.V. Reductions of interval noncooperative games // Computational mathematics and mathematical physics. – 2006. – Vol. 46. – № 11. – Pp.1910-1917 (соавтор Ащепков Л.Т.; личн. вклад 0,2 п. л.)

ДАВЫДОВ ДЕНИС ВИТАЛЬЕВИЧ

ИНТЕРВАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ
ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В ЭКОНОМИКЕ

Автореферат

Подписано к печати 05.10.2009
Формат 60 X 84 $^{1}/_{16}$. Усл. печ.л. 2,79, уч.-изд.л. 3,48.
Тираж 100 экз. Заказ № 132

Издательство Дальневосточного университета,
690950, г. Владивосток, ул. Октябрьская, 27

Отпечатано в типографии
Издательско-полиграфического комплекса ДВГУ
690950, г. Владивосток, ул. Алеутская, 56

10